BODE-diagram

Egy lineáris tulajdonságú szabályozandó szakasz (process) dinamikus viselkedése egyértelmű kapcsolatban áll a rendszer szinuszos jelekre adott válaszával, vagyis a G(jω) frekvencia-átviteli függvénnyel egyértelműen jellemezhető. Még jelenleg is széles körben alkalmazzák a szabályozók tervezése során a frekvencia-tartománybeli módszereket. Bár a jellemző diagramokat manapság már szinte kizárólag számítógéppel rajzoltatják meg, mégis elengedhetetlen a diagramok szerkesztési lépéseinek ismerete.

A frekvencia-átviteli függvény ábrázolására különféle módszerek terjedtek el:

a) BODE-diagramok

Egy komplex számot amplitúdójával és fázisszögével jellemezhetünk. Ezért kézenfekvő a komplex $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ frekvencia-átviteli függvény amplitúdóját és fázisszögét külön diagramokban, a körfrekvencia függvényében ábrázolni:

$$G(j\omega) \leftrightarrow \begin{cases} A(\omega) = |G(j\omega)| \\ \varphi(\omega) \end{cases}$$

Ennek megfelelően két diagram szolgál a G(jω) frekvencia átviteli függvény teljes információtartalmának ábrázolására:

1. Logaritmikus léptékű amplitúdó nagyítás vs. körfrekvencia diagram:

$$\underbrace{20\log|G(j\omega)|}_{A^{dB}} = f(\log\omega)$$

Az amplitúdó-nagyítási függvényt (a kimenő jel és a gerjesztő jel amplitúdójának arányát) logaritmikus léptékben (decibelben) ábrázoljuk a gerjesztő jel logaritmikus léptékben mért körfrekvenciájának függvényében.

> **Megjegyzés:** az amplitúdó-arány decibelben (dB) mérve megállapodás szerint = az amplitúdó-arány logaritmusának hússzorosával: $A^{dB} = 20\log A$. Szigorúan véve csak két azonos dimenziójú mennyiség arányának kifejezésére alkalmas.
> Például ha a kimenőjel amplitúdója 7V, a gerjesztő jel amplitúdója pedig 10V, akkor az amplitúdó-nagyítás $A^{dB} = 20\log\frac{7}{10} = -3$ dB

2. Fázistolás-körfrekvencia diagram: $\varphi = g(\log\omega)$

A fokokban mért fázistolást ábrázoljuk a gerjesztő jel logaritmikus léptékben mért körfrekvenciájának függvényében.

> **Megjegyzés:** a vízszintes tengelyen mért két körfrekvencia (vagy bármely más fizikai mennyiség) tízszeres arányát dekádnak nevezzük, vagyis
>
> $$\text{Körfrekvencia arány} \overset{\text{dekád}}{=} \log\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$
>
> Például 1000 1/s és 10 1/s aránya = 2 dekád, mivel $A^{dB} = \log\frac{1000}{10} = 2$.

Az amplitúdó nagyítás **logaritmikus ábrázolása** azért előnyös, mivel

α) egy összetett (több tényezőből álló) átviteli függvény eredő BODE-diagramja az egyes tényezők BODE-diagramjainak egyszerű összeadásával nyerhető. (A szorzás művelete a logaritmus tartományban összeadássá módosul - Lásd középiskolai matematika)

β) A logaritmikus lépték nagy, több nagyságrendet átfogó tartományok ábrázolását teszi lehetővé mind a vízszintes, mind a függőleges tengelyen.

Jellegzetes tényezők és azok függvényei

A G(jω) frekvencia-átviteli függvény általában több tényező szorzataként állítható elő, melyek közül a leggyakoribb három a következő alakú:

1) $K_0(j\frac{\omega}{\omega_t})^n$, n=0, ±1,±2, stb.

2) $(j\frac{\omega}{\omega_t}+1)^{\pm 1}$

3) $\left[(j\frac{\omega}{\omega_t})^2+2Dj\frac{\omega}{\omega_t}+1\right]^{\pm 1}$

Nézzük az egyes típusok tulajdonságait és jellemző diagramjait.

1. típusú tényező $G(j\omega)=K_0(j\omega)^n$

Mivel „n" csak egész szám lehet, ezért a kifejezés vagy tisztán valós (n= páros), vagy tisztán képzetes (n=páratlan). Ennek megfelelően

$$A(\omega)=\left|K_0(j\omega)^n\right|=K_0(\omega)^n$$

Mindkét oldal logaritmusát véve és 20-szal szorozva

$$\underbrace{20\log A}_{A^{dB}}=20\log K_0+20n\log\omega$$

Ez a kifejezés egy egyenes egyenlete az A^{dB}-logω koordinátarendszerben:

$$\underbrace{A^{dB}}_{y}=\underbrace{20n}_{m}\underbrace{\log\omega}_{x}+\underbrace{20\log K_0}_{b}$$

Az egyenes meredeksége (20n) dB/dekád, vagyis lehet 0 dB/dekád (vízszintes), ±20 dB/dekád, ±40 dB/dekád, stb. Az egyenes ábrázolásához célszerű először az egyenes egy kitüntetett pontját ábrázolni, célszerűen az ω=1 rad/s abszcisszájú pontot, mivel ennek ordinátája az $A^{dB}=20\log K_0$ összefüggéssel egyszerűen számítható.

A fázistolást illetően a következő megállapítást tehetjük:
Ha n=0, akkor $G(j\omega)=K_0$, valós szám fázistolása φ=0
Ha n=1, akkor $G(j\omega)=jK_0\omega$, tisztán képzetes szám, aminek fázistolása φ=90°
Ha n=2, akkor $G(j\omega)=-K_0\omega^2$, negatív valós szám (ellenfázis), fázistolása φ=180°

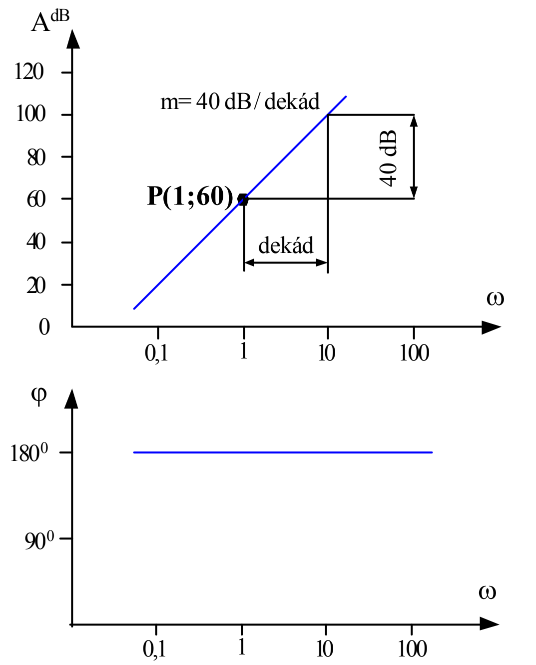
Ha n=3, akkor $G(j\omega)=-jK_0\omega^3$, negatív képzetes szám, fázistolása $\varphi=270^0$.
.stb.
Általánosítva: tetszőleges „n” kitevőre a fázistolás $\varphi=n90°$

Példa

Legyen $G(j\omega)=1000(j\omega)^2$. Rajzoljuk meg az amplitúdó nagyítási függvényt, valamint a fázistolást!

Az egyenes egy pontja P(1 rad/s, 60 dB), ugyanis $\omega=1$ rad/s körfrekvencián az erősítés $A^{dB}=20\log1000=60$ dB. A kifejezés kitevője n=+2, ennek megfelelően az egyenes meredeksége $+2\cdot20=+40$ dB/dekád.
A fázistolás $\varphi=n*90°=2*90°=180°$.

Az amplitúdó nagyítási függvény a felső ábrán látható, alatta a fázistolást ábrázoltuk a gerjesztés körfrekvenciájának függvényében.



2. típusú tényező $G(j\omega)=(j\frac{\omega}{\omega_t}+1)^{\pm1}$, tárolós, elsőrendű tag.

Az amplitúdó-nagyítás $A(\omega)=\left(\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_t})^2+1^2}\right)^{\pm1}$

A BODE-diagramok szerkesztése fáradságos munkával jár, ezért szokás azokat **érintőikkel közelíteni,** nem csökkentve jelentősen a diagramok információtartalmát.

a) Kis ($\omega << \omega_t$) gerjesztő frekvenciákra a gyök alatti mennyiség első tagja az 1 mellett elhanyagolható, így $A(\omega) \approx 1$

Logaritmálás után a bal oldali (kisfrekvenciás) aszimptota egyenlete:

$\underbrace{20\log A}_{A^{dB}} = 20\log 1 = 0$ (Vízszintes koordinátatengely egyenlete)

b) Nagy ($\omega >> \omega_t$) gerjesztő frekvenciákra az 1 elhanyagolható a másik tag mellett, így

$$A(\omega) \approx \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{\pm 1}$$

Logaritmálás és 20-szal való szorzás után a jobboldali aszimptota egyenlete:

$\underbrace{20\log A}_{A^{dB}} = \underbrace{\pm 20}_{m}\underbrace{\log\omega}_{x} \mp \underbrace{20\log\omega_t}_{b}$ (±20 dB/dekád meredekségű ferde egyenes egyenlete)

Érintők metszéspontja

Az aszimptoták megrajzolását megkönnyíti azok metszéspontjának ismerete. A két aszimptota metszéspontja a következő egyenletrendszerből kapható:

$$\left.\begin{aligned} A^{dB} &= 0 \\ A^{dB} &= \pm 20\log\omega \mp 20\log\omega_t \end{aligned}\right\}$$

Innen $\omega=\omega_t$ adódik. Most már fontos jelentést tulajdoníthatunk a kifejezésben ω_t-vel jelölt mennyiségnek. Az ω_t jelentése: **törésponti körfrekvencia**. Ennél a körfrekvenciánál változik az érintők meredeksége. Amennyiben a kitevő n=1, a jobboldali aszimptota meredeksége +20 dB/dekád értékkel változik a baloldali aszimptota meredekségéhez képest (felüláteresztő jelleg).

Amennyiben a kitevő n= -1, a jobboldali aszimptota meredeksége -20 dB/dekád értékkel változik a baloldali aszimptota meredekségéhez képest (aluláteresztő jelleg).

Közelítés hibája

Most nézzük meg, hogy mekkora **maximális hibát** követünk el, ha az amplitúdó nagyítási függvényt az érintőivel helyettesítjük! Az amplitúdó nagyítás pontos értéke a törésponti körfrekvencián

$$A(\omega=\omega_t) = \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_t}{\omega_t}\right)^2 + 1^2}\right)^{\pm 1} = \left(\sqrt{2}\right)^{\pm 1}$$

Decibelben mérve

$A^{dB}(\omega=\omega_t) = 20\log 2^{\pm 0,5} = \pm 10\log 2 = \pm 3$ dB

A kisfrekvenciás erősítéshez képest (0 dB) a töréspontban ténylegesen ± 3 dB erősítés van (az előjel a kitevő előjelével egyezik meg), ezért **az érintőkkel való közelítés hibája a töréspontban ± 3 dB.**

A fázistolás kis frekvencián ($\omega<<\omega_t$) $\varphi=0°$, mivel $G(j\omega)\approx 1$, valós szám.

A nagyfrekvenciás fázistolás ($\omega >> \omega_t$) $\varphi = \pm 90°$, mivel $G(j\omega) \approx (j\omega/\omega_t)^{\pm 1}$, képzetes szám.

Példa

Határozzuk meg a $G(j\omega) = \dfrac{100}{2j\omega + 100}$ frekvencia-átviteli függvény (aluláteresztő jellegű tag) aszimptotáit!

Először hozzuk ismert alakra a kifejezést:

$m = -20\text{dB}/\text{dekád}$

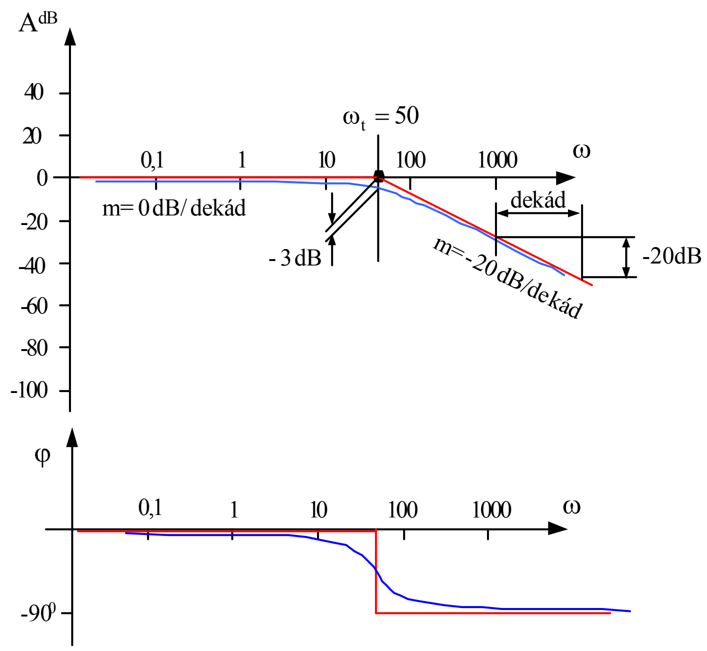
$$j\omega) = \frac{100}{2j\omega + 100} = 100(2j\omega + 100)^{-1} = 100[100(\frac{2j\omega}{100} + 1)]^{-1} = (j\frac{\omega}{50} + 1)^{-1}$$

ω_t

Az átalakított formulából kiolvashatjuk a törésponti körfrekvencia értékét: ω_t=50 1/s. A kifejezés kitevője n= -1, ezért a jobboldali érintő meredeksége (-1)*20 dB/dekád, az egyenes lefelé lejt.

Az ábrán jól látszik a tényleges (kék) görbe és az érintőkkel helyettesített (piros) görbe maximális eltérése a töréspontban (3 dB). Az érintők a törésponttól távol nagyon jól közelítik a görbét.

A fázisgörbét érintőivel helyettesítve 90 fokos fázisugrás a törésponti frekvencián következik be. A valóságban a fázisváltozás nem élesen, hanem folyamatosan történik (kék görbe). A törésponttól távol a közelítés jó.



3. típusú tényező $G(j\omega) = \left[(j\frac{\omega}{\omega_t})^2 + 2Dj\frac{\omega}{\omega_t} + 1 \right]^{\pm 1}$, másodrendű tag.

a) Kis frekvencián ($\omega << \omega_t$)az amplitúdó nagyítási függvény $A(\omega) \approx 1$, vagyis $A^{dB}(\omega) \approx 0$.

b) Nagy frekvencián ($\omega >> \omega_t$ és $\omega >> 2D\omega_t$) az amplitúdó nagyítási függvény $A(\omega) \approx \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^{\pm 2}$,

vagyis $A^{dB}(\omega) \approx \pm 40 \log \omega \mp 40 \log \omega_t$.
Az érintők metszéspontja most is $\omega = \omega_t$.
A legnagyobb eltérés a törésponti frekvencián van, értéke a következő:

$$A(\omega = \omega_t) = \sqrt{\underbrace{\left(1 - \frac{\omega_t^2}{\omega_t^2}\right)^2}_{0} + \left(2D\frac{\omega_t}{\omega_t}\right)^2}^{\,\pm 1} = 2D^{\pm 1}.$$

A fázistolás nagy frekvencián, mivel $G(j\omega) \approx \left(-\frac{\omega^2}{\omega_t^2}\right)^{\pm 1}$ nagy negatív valós szám, a következő összefüggéssel számítható:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-\frac{\omega^2}{\omega_t^2}}{0} = n180^0$$

Példa

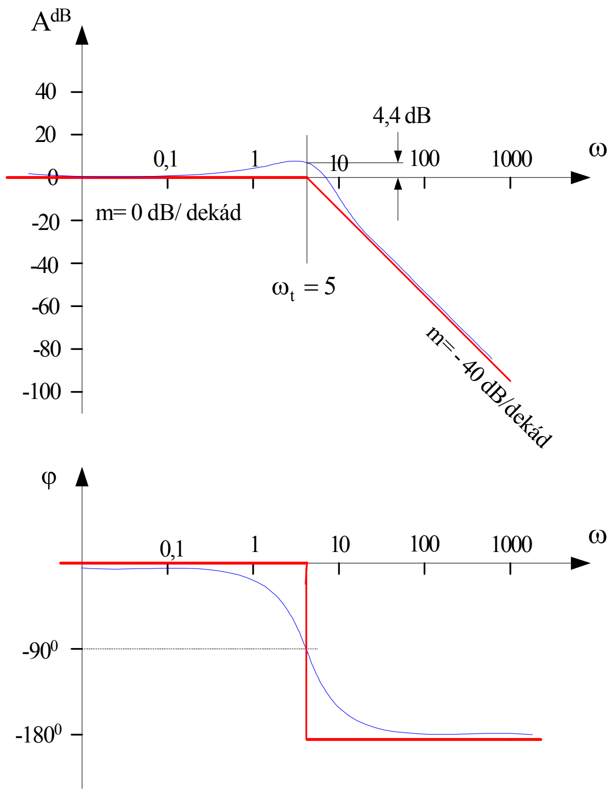
Rajzoljuk meg a $G(j\omega) = \dfrac{25}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 25}$ frekvencia-átviteli függvény érintőkkel közelített BODE-diagramjait!

Alakítsuk át a kifejezést a következő módon:

$$G(j\omega) = \frac{25}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 25} = \frac{25}{25\left[\left(\frac{j\omega}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{j\omega}{5}\right) + 1\right]} = \left[\left(\frac{j\omega}{\underbrace{5}_{\omega_t}}\right)^2 + \overbrace{\frac{3}{5}}^{2D}\left(\frac{j\omega}{\underbrace{5}_{\omega_t}}\right) + 1\right]^{\overset{n}{-1}}$$

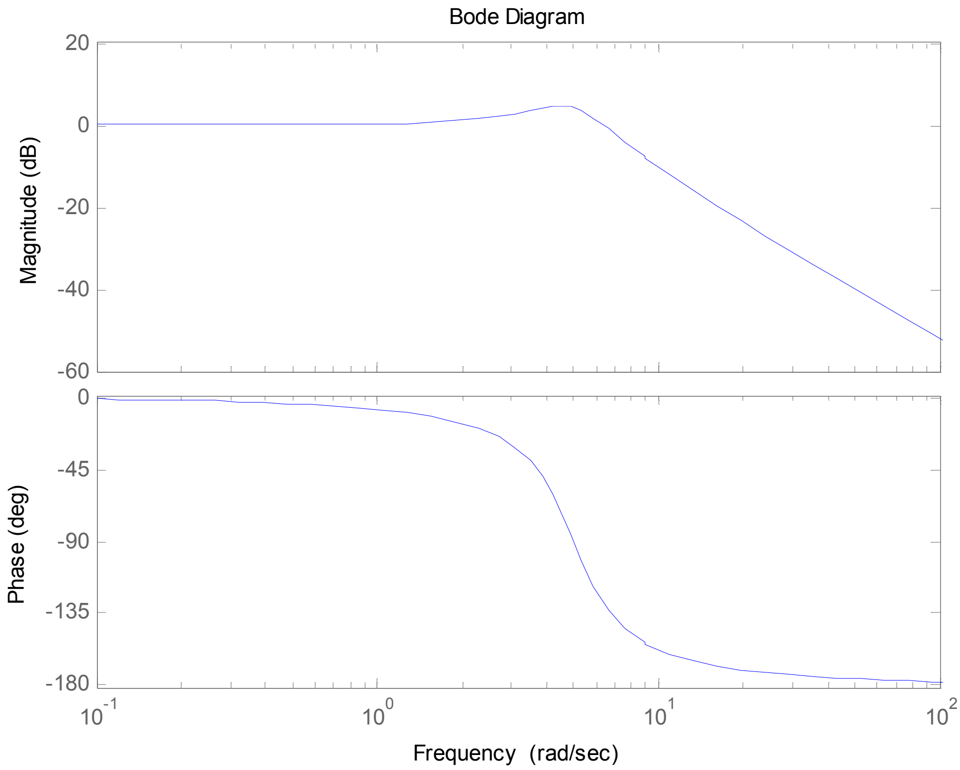
Az átalakított kifejezésből az alábbi információkaz olvashatjuk ki:

A törésponti körfrekvencia ω_t=5 rad/s.
A csillapítás D=0,3→törésponti erősítés-eltérés $(2D)^{-1}$=1,66, decibelben +4,4 dB.
A kitevő n=-1, a jobboldali érintő 20·2n= -40 dB/dekád meredekségű.
A fázistolás a törésponti körfrekvenciánál 2n90=-180 fokkal változik.



MATLAB programmal a NEW, m-file menü választása után írjuk be a következő utasításokat:

```
num=[25];
den=[1 3 25];
bode(num,den)
```



Példa összetett frekvencia-átviteli függvény ábrázolására

Ábrázoljuk érintőivel a $G(j\omega) = \frac{100000}{j\omega} \cdot \frac{(j\omega + 0{,}1)}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 400}$ frekvencia-átviteli függvényt!

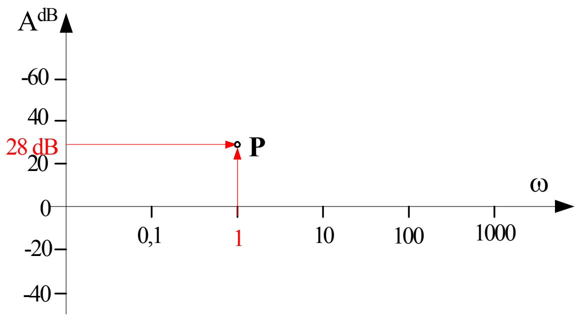
Átalakítva a kifejezést ismert típusú tényezők szorzatára:

$$G(j\omega) = \frac{100000}{j\omega} \cdot \frac{(j\omega + 0{,}1)}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 400} = \frac{100000}{j\omega} \cdot \frac{0{,}1(\frac{j\omega}{0{,}1} + 1)}{400\left[\left(\frac{j\omega}{20}\right)^2 + 0{,}25\left(\frac{j\omega}{20}\right) + 1\right]} =$$

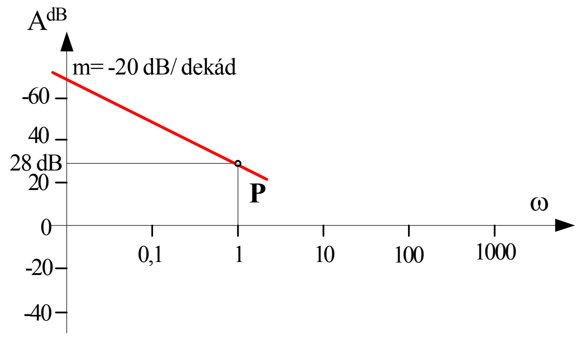
$$= \underbrace{25(j\omega)^{-1}}_{1.\text{típus}} \underbrace{(\frac{j\omega}{0{,}1} + 1)^{+1}}_{2.\text{típus}} \underbrace{\left[\left(\frac{j\omega}{20}\right)^2 + 0{,}25\left(\frac{j\omega}{20}\right) + 1\right]^{-1}}_{3.\text{típus}}$$

Az ábrázolás során a következő sorrendet célszerű követni:

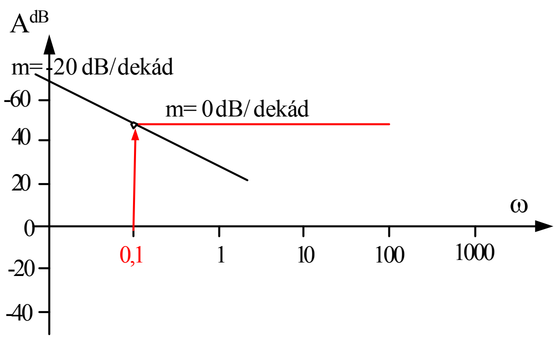
1) Ha van $K_0(j\omega)^n$ típusú tényező, akkor annak ábrázolásával kezdjük a szerkesztést, mivel az ilyen tényezőből származik a **görbe bal oldali érintője**.
Az érintőnek célszerűen azt a P pontját határozzuk meg, melynek abszcisszája ω=1 rad/s. Itt az erősítés $A_P\big|_{\omega=1} = \left|25(j\omega)^{-1}\right|$=25 ami decibelben $A_P^{dB}(\omega = 1) = 20\log 25 = 28dB$



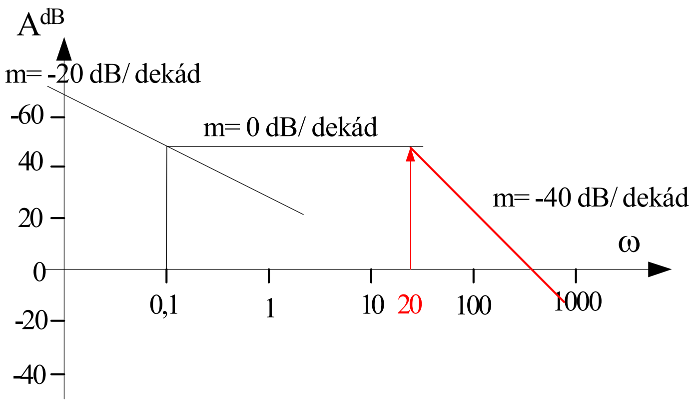
Az egyenes meredeksége annyiszor 20 dB/dekád, amennyi (jω) kitevője. Jelen esetben n= -1, tehát az egyenes meredeksége -20 dB/dekád.



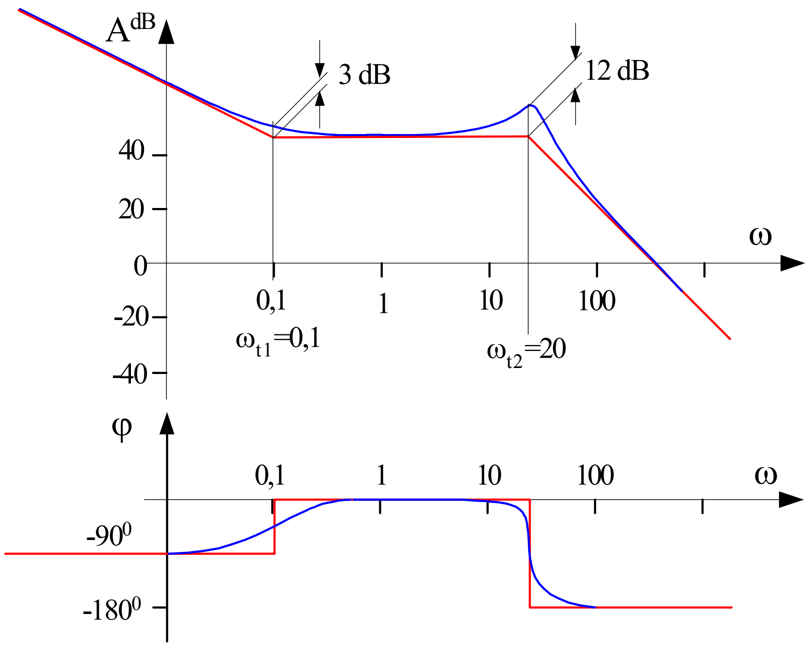
2) Azzal a tényezővel folytatjuk a szerkesztést, melynek törésponti körfrekvenciája a legkisebb. Jelen esetben ez a $(\frac{j\omega}{0{,}1}+1)^{+1}$ tényező, melynek törésponti körfrekvenciája $\omega_{t1}=0{,}1\ \mathrm{rad/s}$. Mivel ez a tényező elsőrendű és kitevője n=+1, ezért a töréspont után az érintő meredeksége n20= +20 dB/dekád értékkel változik a töréspont előtti értékhez képest. A töréspont előtt a meredekség -20 dB/dekád volt, így a töréspont után -20 dB/dekád+20 db/dekád=0 dB/dekád lesz.



3) A következő tényező az, melynek törésponti körfrekvenciája soron következik. A $\left[\left(\frac{j\omega}{20}\right)^2+0{,}5\left(\frac{j\omega}{20}\right)+1\right]^{-1}$ **másodrendű** tényező törésponti körfrekvenciája $\omega_{t2}=20\ \mathrm{rad/s}$, kitevője n=-1. Ebben a töréspontban az érintő meredeksége a töréspont előtti 0 dB/dekád értékhez képest 2n20 dB/dekád értékkel, tehát -40 dB/dekád értékkel változik.

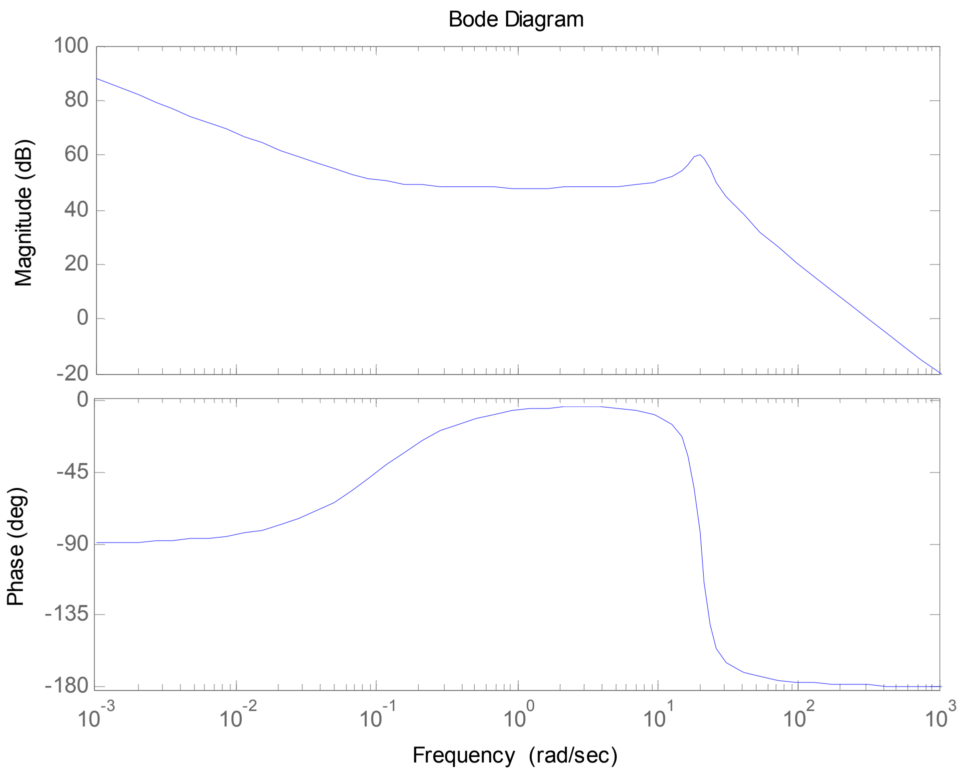


Végezetül a közelítő görbét is berajzoljuk az ábrába. Az erősítés eltérés az első ω_{t1}=0,1 rad/s törésponti körfrekvencián 3 dB (elsőrendű tad!), míg a második ω_{t2}=20 rad/s töréspontban $(2D)^n=0{,}25^{-1}=4$, ami decibelben 20log4=12 dB.



Ellenőrzésül Matlab programmal is megrajzoltatjuk a BODE-diagramokat. A frekvencia-átviteli függvény számlálójának (numerator=számláló) és nevezőjének (denominator=nevező) megadása után a bode(számláló,nevező) utasítással megkapjuk a BODE-diagramokat. A program az alábbi m-file begépeléséből áll:

```
num=[100000 10000];    % számláló jω csökkenő hatványai szerint rendezett együtthatói
den=[1 5 400 0];       % nevező jω csökkenő hatványai szerint rendezett együtthatói
bode(num,den)
title('Bode Diagram')  % a diagram címe
```



A kézzel szerkesztett, valamint a számítógéppel rajzoltatott BODE-diagramok tökéletes egyezést mutatnak.

A BODE-diagramok további tulajdonságai

Erősítés változtatása

Vizsgáljuk meg, hogy miként módosulnak egy $G_0(j\omega)$ alakú frekvencia-átviteli függvény BODE-diagramjai, ha a függvényt λ skalár együtthatóval megszorozzuk

a) Először vizsgáljuk az $A(\omega) = \lambda A_0(\omega)$ amplitúdó nagyítást. Vegyük mindkét oldal logaritmusának hússzorosát:

$$\underbrace{20\log A(\omega)}_{A^{dB}(\omega)} = 20\log\lambda + \underbrace{20\log A_0(\omega)}_{A_0^{dB}(\omega)}$$

Megállapíthatjuk, hogy az új amplitúdó nagyítási függvény csupán egy 20logλ konstansban tér el az eredeti $A_0^{dB}(\omega)$ amplitúdó nagyítási függvénytől.
Egy λ konstanssal való szorzás az eredeti BODE-diagramot függőleges irányban tolja el 20logλ értékkel.

Ha λ>1, akkor az eredeti BODE-diagram felfelé, ha λ<1, akkor lefelé tolódik el.

b) Most vizsgáljuk meg, hogy a λ konstanssal való szorzásnak van-e hatása a fázistolásra?
A fázistolás a komplex $G_0(j\omega)$ függvény komplex $N_0(j\omega)$ számlálójának és komplex $D_0(j\omega)$ nevezőjének fázistolásával kifejezve

$$\varphi_0(\omega) = \varphi_{N0}(\omega) - \varphi_{D0}(\omega)$$

Tudjuk, hogy a $\lambda N_0(j\omega)$ művelet az $N_0(j\omega)$ komplex számnak mind a valós, mind a képzetes részét ugyanolyan arányban nyújtja meg, hiszen

$$\lambda N_0(j\omega) = \lambda(\mathrm{Re}\, N_0(j\omega) + \mathrm{Im}\, N_0(j\omega))$$

Következésképpen a valós számot ábrázoló vektornak csak a hossza változik, a szöge nem.

Az elmondottakból következik, hogy

Egy λ konstanssal való szorzásnak a fázisviszonyokra nincs hatása.

Távoli töréspontokra érintőkkel való közelítés jó

```
m1=tf([100000 10000],[1 5 400 0]);
m2=tf(10*[100000 10000],[1 5 400 0]);
m3=tf(100*[100000 10000],[1 5 400 0]);
bode(m1,m2,m3)
```