Függvények közelítése hatványsorral (Taylor-sor)

Az x_0 helyen többször deriválható y(x) függvényt az x_0 pont környezetében jól közelíthetjük az

$$y(x) = y(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2y(x)}{dx^2}\bigg|_{x_0}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3y(x)}{dx^3}\bigg|_{x_0}(x - x_0)^3 + ...$$

végtelen hatványsorral. A deriváltak értékét az $x=x_0$ helyen kell számítani.

Ha az y(x) függvény Taylor-sorának csupán az első két tagját tartjuk meg, akkor az

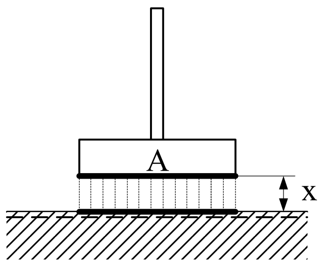
$$y(x) \approx y(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x_0}(x - x_0)$$

közelítő egyenlőség azt jelenti, hogy az y(x) függvényt kis szakaszon a $P(x_0;y_0)$ pontbeli érintőjével helyettesítjük. A felírt összefüggés az érintő egyenes egyenlete, mely megegyezik a középiskolában tanult $y - y_0 = m(x - x_0)$ „egy ponton átmenő egyenes egyenletével", ahol az iránytangens a függvény P pontban számított differenciálhányadosa.

1) <u>Alkalmazás: munkaponti linearizálás</u>

1/1. Példa

Egy síkkondenzátor kapacitása a $C = \varepsilon\frac{A}{x}$ összefüggéssel számítható, ahol x a lemezek távolsága. A munkaponti távolság x_0=0,001m. A kondenzátort távolságmérő szenzorként akarjuk alkalmazni, aminek alapfeltétele, hogy a kapacitás lineárisan változzon a távolság függvényében.



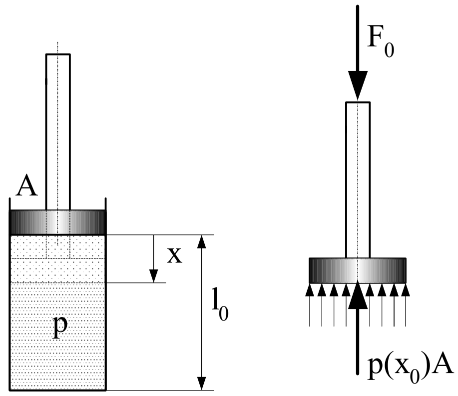
Amennyiben csak a munkapont nagyon kis környezetében működik a szenzor (például 0,0009….x…..0,0011m), a függvénykapcsolat linearizálható. Határozzuk meg az x_0 munkapont kis környezetében linearizált függvénykapcsolatot!

$$C(x) \approx C(x_0) + \frac{dC}{dx}\bigg|_{x_0}(x - x_0) = \frac{\varepsilon A}{x_0} - \frac{\varepsilon A}{x_0^2}(x - x_0) = \frac{2\varepsilon A}{x_0} - \frac{\varepsilon A}{x_0^2}x$$

A kapacitás a munkapont környezetében arányos a távolsággal.

1/2. Példa

Egy l_0=0,2 m hosszú, A=0,002 m^2 dugattyú felületű légrugó $p_0=5\cdot10^5$ Pa nyomású levegővel van feltöltve. A légrugót terhelő erő a jármű önsúlyból adódó F_0=1430 N körül ingadozik.



Határozzuk meg a légrugó munkapontban linearizált erő-elmozdulás egyenletét! Mekkora a légrugó munkaponti (differenciális) rugómerevsége? (A differenciális rugómerevség azt jelenti, hogy a munkapont környezetében mekkora ΔF erőváltozás okoz Δx elmozdulás változást.)

Megoldás

Közelítőleg izotermikus állapotváltozást feltételezve, a légrugóra felírhatjuk a Boyle-Mariotte gáztörvényt:

$$p_0V_0 = pV$$

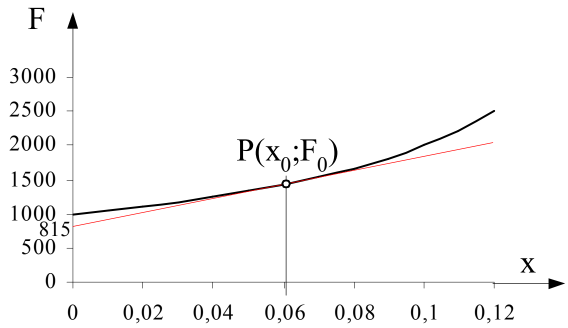
A dugattyú elmozdulásával kifejezve:

$$p_0Al_0 = pA(l_0 - x)$$

A dugattyúra ható erő x elmozdulásnál:

$$F(x) = pA = \frac{p_0Al_0}{l_0 - x}$$

Az erő változását az ábrán láthatjuk. Megállapítható a jelleggörbe progresszív (keményedő) jellege.



A „P" munkapont F_0=1430N erőnél és a hozzá tartozó

$$x_0 = l_0 - \frac{p_0 A l_0}{F_0} = 0{,}2 - \frac{5\cdot 10^5 \cdot 0{,}002\cdot 0{,}2}{1430} = 0{,}06 \text{ m.}$$

dugattyú elmozdulásnál van. A linearizált jelleggörbe (a munkaponti érintő) egyenlete

$$F(x) = F_0 + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) = F_0 + \frac{p_0 A l_0}{(l_0 - x_0)^2}(x - x_0) = 1430 + 10204(x - 0{,}06) = \underline{\underline{815 + 10204x}}$$

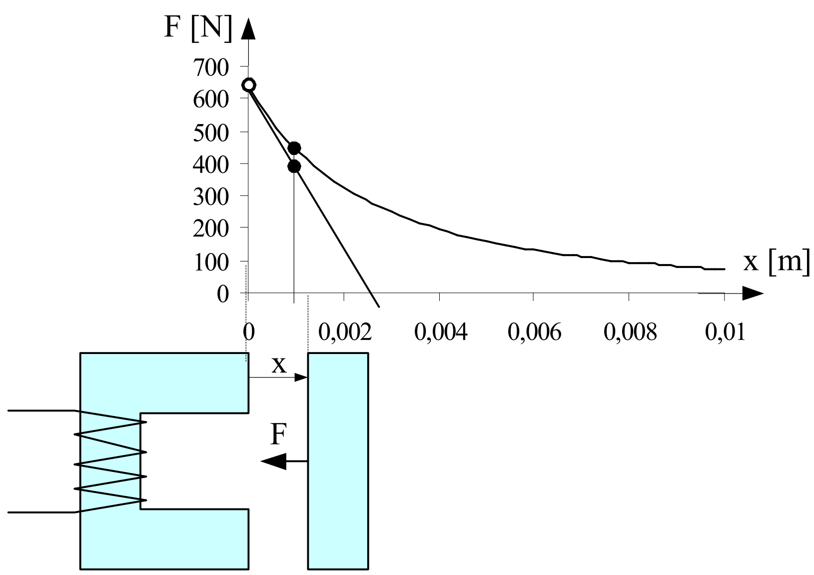
Az ábrán jól látható, hogy a munkapont környezetében a lineáris közelítés alig tér el a nemlineáris (keményedő) jelleggörbétől.
A differenciális rugómerevség azt jelenti, hogy a munkapont környezetében mekkora ΔF erőváltozás okoz Δx elmozdulás változást. Átrendezve a fenti egyenletet

$$c_0 = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x) - F_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} = \underline{\underline{10204 \text{ N/m.}}}$$

1/3. Példa
Egy elektromágnes Newtonban mért behúzó ereje az x[m] távolság függvényében az

$$F = \frac{0{,}016}{(x + 0{,}005)^2}$$

összefüggés szerint változik. Mivel a mágnes mozgó tagja csak alig távolodik el az álló tagtól, ezért az összefüggést az x_0=0 munkapont környezetében egyszerűbben kezelhető lineáris összefüggéssel helyettesíthetjük.
a) Linearizáljuk az összefüggést az x_0=0 munkapont környezetében!
b) Mekkora a linearizált összefüggés hibája x_1=0,001m távolságban?



Megoldás
Ad a)
A függvény Taylor-sorának felírásához kiszámítjuk a következő mennyiségeket:

$$F_0 = F(x_0) = \frac{0{,}016}{(x_0 + 0{,}005)^2} = 640 \quad (N)$$

$$\frac{dF}{dx} = 0{,}016(-2)(x + 0{,}005)^{-3}$$

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} = 0{,}016(-2)(0 + 0{,}005)^{-3} = -256000 \ \ (N/m)$$

A függvényt az x_0=0 pontban linearizálva (Taylor-sorának első két tagjával közelítve):

$$F_L(x) \approx F(x_0) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) = \underline{\underline{640 - 256000 \cdot x}}$$

Ad b)
A függvény értéke az x_1=0,001 m pontban

$$F(x_1) = \frac{0{,}016}{(0{,}001 + 0{,}005)^2} = 444{,}4 \quad (N)$$

A linearizált függvény értéke az x_1=0,001 m pontban

$$F_L(x_1) = 640 - 256000 \cdot 0{,}001 = 384 \ \ (N)$$

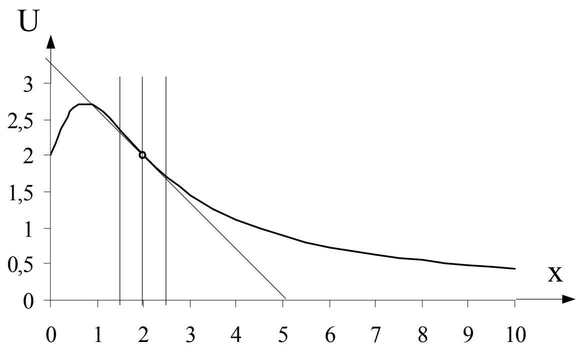
A hiba:

$h = \dfrac{444{,}4 - 384}{444{,}4} \cdot 100 = 13{,}5\ \%$, meglehetősen nagy! A függvény erősen nemlineáris, a lineáris közelítést még ennél is kisebb tartományban lehet csak alkalmazni!

1/4. Példa
Egy reflexiós optokapu feszültség-elmozdulás jelleggörbéjének közelítő egyenlete

$$U = \frac{2x + 2}{0{,}5x^2 + 1}.$$

a) Határozzuk meg az x_0=2 mm munkapontban linearizált jelleggörbe egyenletét!
b) Mekkora a maximális hiba az 1,5….x…..2,5 mm intervallumban?
c) Mekkora a linearitási hiba?



Megoldás
ad a)

$$U \approx U_0 + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) = 2 + \left.\frac{2(0{,}5x^2+1) - (2x+2)x}{(0{,}5x^2+1)^2}\right|_{x=x_0}(x-2) = 2 - 0{,}66(x-2) = \underline{\underline{3{,}33 - 0{,}66x}}$$

ad b)
A feszültség az x=1,5 helyen

$$U(1{,}5) = \frac{2\cdot 1{,}5 + 2}{0{,}5\cdot 1{,}5^2 + 1} = 2{,}35 \ \ V$$

A linearizált összefüggéssel ugyanitt

$$U_L(1{,}5) = 3{,}33 - 0{,}66\cdot 1{,}5 = 2{,}34 \ \ V$$

A feszültség az x=2,5 helyen

$$U(2{,}5) = \frac{2\cdot 2{,}5 + 2}{0{,}5\cdot 2{,}5^2 + 1} = 1{,}696 \ \ V$$

A linearizált összefüggéssel ugyanitt

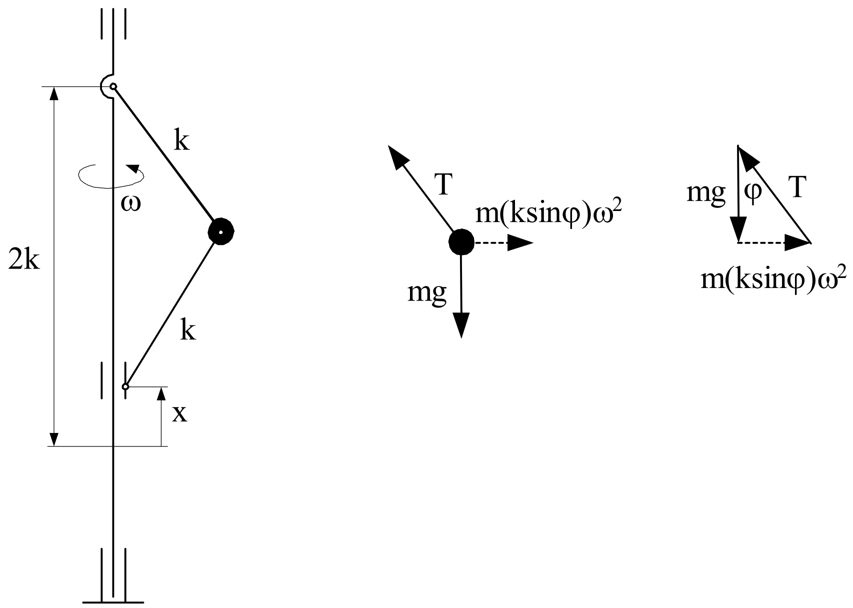
$$U_L(2{,}5) = 3{,}33 - 0{,}66\cdot 2{,}5 = 1{,}68 \ \ V$$

A nagyobb eltérés az x=2,5 helyen van, ΔU=1,696-1,68=0,016 V.

ad c)
A linearitási hiba

$$h = \frac{0{,}016}{2{,}35 - 1{,}696}\cdot 100 = \underline{\underline{2{,}44\%}}$$

1/5 Példa
A röpsúlyos fordulatszámmérőt gőzgépek fordulatszám-szabályozó berendezéseiben használták. A függőleges tengely körül forgó m tömegű röpsúly k=0,2 m hosszúságú, csuklós karon van rögzítve. A tömeghez rögzített másik kar egy elhanyagolható tömegű csúszógyűrűt mozgat a tengelyen, melynek x elmozdulása összefüggésben van a tengely szögsebességével. A csúszógyűrű a gőz beömlő szelepét szabályozza.



a) Vezessünk le összefüggést a tengely szögsebessége és a csúszógyűrű x elmozdulása között!
b) Linearizáljuk az összefüggést ω=20 rad/s szögsebesség környezetében!

Megoldás
ad a)
Megrajzoljuk a tömegpont *free-body diagramját*. A súlyerő, a centrifugális erő (D'Alambert-elv), valamint a felső kar által kifejtett *T* erő egyensúlyban van. A vektorábra szerint a kar függőlegessel bezárt szöge:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{mk\sin\varphi\cdot\omega^2}{mg}$$

Átrendezve

$$\sin\varphi(mg - mk\omega^2\cos\varphi) = 0$$

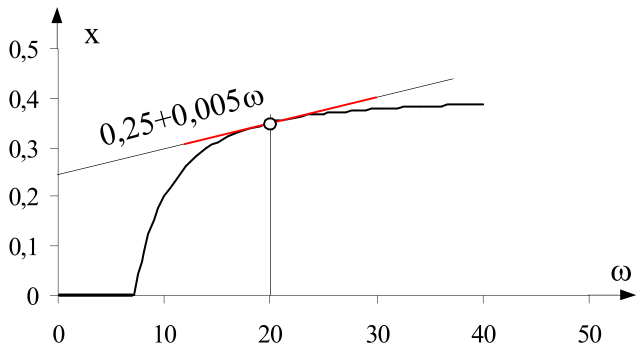
Ez akkor teljesül, ha a szorzat valamelyik tényezője zérus, tehát vagy
a) $\sin\varphi = 0$, vagy
b) $g - k\omega^2\cos\varphi = 0 \;\rightarrow\; \cos\varphi = \frac{g}{k\omega^2}$. Mivel a cos(…) függvény legfeljebb 1 étéket vehet fel, ezért ez az összefüggés csak akkor igaz, ha $\omega \ge \sqrt{\frac{g}{k}}$.
Összefoglalva, a kar elfordulási szöge

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{g}{k\omega^2} & \text{ha } \omega \ge \sqrt{\dfrac{g}{k}} \\ 0 & \text{ha } \omega < \sqrt{\dfrac{g}{k}} \end{cases}$$

A csúszógyűrű elmozdulása az alaphelyzethez képest:

$$x = \begin{cases} 2k\left(1-\dfrac{g}{k\omega^2}\right), & \text{ha } \omega \ge \sqrt{\dfrac{g}{k}} \\ 0, & \text{ha } \omega < \sqrt{\dfrac{g}{k}} \end{cases}$$

A csúszógyűrű egy bizonyos szögsebességig nem mozdul el. Az ábrán a fenti összefüggést ábrázoltuk.



ad b)
A függvény nemlineáris. Az $x_0(\omega_0)$ munkapont környezetében linearizálva:

$$x_L \approx x_0 + \left.\frac{dx}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0) = 2k\left(1-\frac{g}{k\omega_0^2}\right) - 2g(-2)\frac{1}{\omega_0^3}(\omega-\omega_0) = \left(2k-\frac{6g}{\omega_0^2}\right)+\frac{4g}{\omega_0^3}\omega$$

A számadatok behelyettesítésével

$$x_L \approx \left(2\cdot 0{,}2-\frac{60}{20^2}\right)+\frac{40}{20^3}\omega = \underline{\underline{0{,}25+0{,}005\omega}}$$

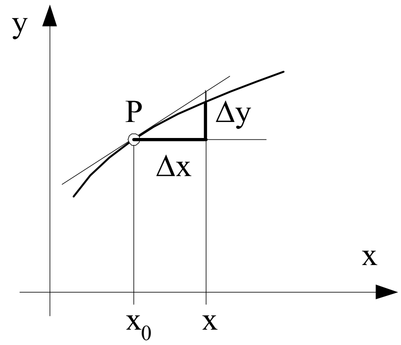
2) <u>Alkalmazás: paraméterváltozások hatásának vizsgálata</u>

Átrendezve a kéttagú Taylor-sort,

$$\underbrace{y(x)-y(x_0)}_{\Delta y} \approx \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x_0}\underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x}$$

$$\Delta y \approx \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}\Delta x$$

A függvény megváltozásának lineáris közelítését a függvény **differenciáljának** nevezzük.



2/1. Példa

Egy síkkondenzátor kapacitása a $C = \varepsilon \frac{A}{x}$ összefüggéssel számítható. A lemezek közötti távolság legyen x_0. Kérdés, hogy 1% távolság változás mekkora kapacitásváltozást okoz?

Megoldás

A kapacitásfüggvény differenciálját felírva (feltéve, hogy ε és A nem változik)

$$\Delta C \approx \left.\frac{dC}{dx}\right|_{x_0} \Delta x$$

Elvégezzük a kijelölt deriválást:

$$\Delta C \approx -\left.\frac{\varepsilon A}{x^2}\right|_{x_0} \Delta x = -\underbrace{\frac{\varepsilon A}{x_0}}_{C_0} \cdot \frac{\Delta x}{x_0}$$

Átrendezve az összefüggést

$$\frac{\Delta C}{C_0} \approx -\frac{\Delta x}{x_0}$$

A következtetés tehát az, hogy a kapacitás fajlagos változása megegyezik a távolság fajlagos változásával, csak ellenkező értelemben. Tehát 1% távolság növekedés közelítőleg ugyanakkora, vagyis 1% kapacitás csökkenést okoz!

2/2. Példa

Egy matematikai inga lengésideje a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ összefüggéssel számítható. Tételezzük fel, hogy a nehézségi gyorsulás a mérés helyén állandó, csupán az inga hossza változik a hőtágulás következtében. Mekkora a fajlagos lengésidő változás 1 ezrelék ingahossz-változás következtében?

$$\Delta T = \left.\frac{dT}{dl}\right|_{l_0} \Delta l = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{l_0}}\right)\Delta l = \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}}_{T_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

Átrendezve

$$\frac{\Delta T}{T} = 0{,}5\frac{\Delta l}{l}$$

Tehát 1 ezrelék hosszváltozás fél ezrelék lengésidő változást okoz.

3) <u>Alkalmazás: többváltozós függvények paraméterváltozásainak hatása</u>

3/1 Példa

Egy többváltozós függvény legyen az *l* hosszúságú, *A* keresztmetszetű villamos vezető ("nyúlásmérő bélyeg") *R* ellenállása.

$$R(\rho, l, A) = \rho\frac{l}{A}$$

Az a célunk, hogy kapcsolatot találjunk a vezető ΔR/R fajlagos ellenállásváltozása és ε=Δl/l fajlagos nyúlása között (ezt az arányt nevezzük gauge-faktornak).

A többváltozós függvény differenciálját (megváltozásának fő részét) hasonlóképp számítjuk, mint az egyváltozós függvénynél tettük, miközben itt a szuperpozíció elvét alkalmazzuk. (Külön-külön kiszámítjuk, hogy mennyivel változna meg a függvény, ha csupán az egyik paramétere változna, majd ezeket a rész-változásokat összegezzük). A "∂" szimbólum jelöli a parciális deriválást többváltozós függvényeknél.

.

Az ellenállás változása három paraméter változásától függ. A magasabb hatványú tagokat elhagyva, csak a változás főrészét (differenciálját) megtartva:

$$\Delta R \approx \left.\frac{\partial R}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} \Delta\rho + \left.\frac{\partial R}{\partial l}\right|_{l_0} \Delta l + \left.\frac{\partial R}{\partial A}\right|_{A_0} \Delta A$$

A parciális deriváltakat kiszámítva és behelyettesítve

$$\Delta R \approx \frac{l_0}{A_0}\Delta\delta + \frac{\rho_0}{A_0}\Delta l - \frac{\rho_0 l_0}{A_0^2}\Delta A$$

Kissé átalakítjuk az összefüggést, hogy **fajlagos** paraméterváltozásokat kapjunk:

$$\Delta R \approx \underbrace{\frac{\rho_0 l_0}{A_0}}_{R_0}\cdot\frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \underbrace{\frac{\rho_0 l_0}{A_0}}_{R_0}\cdot\frac{\Delta l}{l_0} - \underbrace{\frac{\rho_0 l_0}{A_0}}_{R_0}\cdot\frac{\Delta A}{A_0}$$

Átosztva a munkaponti ellenállás értékével

$$\frac{\Delta R}{R_0} \approx \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta\delta}{\underbrace{\rho_0}_{\approx 0}} + \varepsilon - 2\varepsilon_k$$

Itt ε jelöli a fajlagos hosszváltozást. A keresztirányú fajlagos hosszváltozás számításakor a Pappus-Guldin tételt alkalmaztuk:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta r \cdot 2 r_0 \pi}{r_0^2 \pi} = 2\frac{\Delta r}{r_0} = 2\varepsilon_k$$

A ρ fajlagos ellenállás értéke a huzal deformációja következtében nem változik ($\Delta\rho=0$), valamint a keresztirányú fajlagos alakváltozás nem független a hosszirányú fajlagos alakváltozástól (Szilárdságtan: $\varepsilon_k = -\nu\varepsilon$), így

$$\frac{\Delta R}{R_0} \approx \varepsilon - 2\varepsilon_k = \varepsilon - 2(-\upsilon\varepsilon) = \varepsilon(1+2\upsilon)$$

A nyúlásmérő bélyeg “átviteli tényezője” (gauge-faktor)

$$g = \frac{\frac{\Delta R}{R_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = 1 + 2\upsilon \approx 2$$

Ez azt jelenti, hogy 1% hosszváltozás 2% ellenállásváltozást okoz! Más szavakkal $\varepsilon=0{,}001$ fajlagos hosszirányú nyúlás $\Delta R/R=0{,}002$ fajlagos ellenállásváltozást okoz.

3/2. Feladat

Az R_1 és R_2 ellenállást párhuzamosan kapcsoljuk. Hány százalékkal változik az eredő ellenállás, ha az R_1 ellenállás értéke a hőmérsékletváltozás következtében 1 százalékkal megváltozik? (*Eredmény:* $R_2/(R_1+R_2)$ százalék)

Mekkora a fajlagos ellenállás-változás, ha R_1 és R_2 is megváltozik?

(*Eredmény*: $\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot\frac{\Delta R_2}{R_2}$)

3/3. Feladat

Az R_1 és R_2 ellenállást sorba kapcsoljuk. Mekkora az eredő ellenállás fajlagos változása, ha R_1 és R_2 is megváltozik?

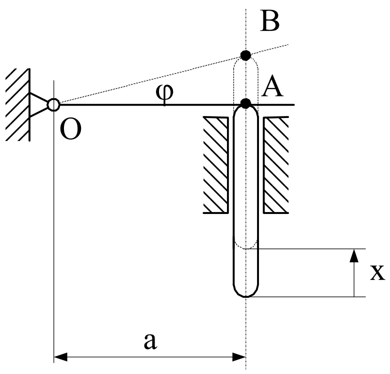
(*Eredmény*: $\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{\Delta R_2}{R_2}$)

4) <u>Alkalmazás: hibabecslés</u>

4/1. Példa

Adott egy tangens mechanizmus. A tapintó x elmozdulását közvetlenül alakítja át az emeltyű (és a hozzá rögzített mutató) φ szögelfordulásává. Határozzuk meg az elkövetett hibát az *x* bemenet függvényében!

Ha a=20mm, akkor mekkora lehet a szenzor méréstartománya 1% hibahatáron belül?



Az emeltyű φ szögelfordulása az OAB derékszögű háromszögből

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{x}{a} \quad \rightarrow \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{x}{a}$$

Az arányos elfordulási szög $\varphi_{lin} = \frac{x}{a}$ lenne például egy fogaskerék-fogasléc áttétel esetén.(középponti szög=ívhossz/sugár).

A hiba

$$\Delta\varphi = \mathrm{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{a}$$

Az analitikus tárgyalhatóság érdelében az arctg(x/a) függvényt Taylor-sorba fejtjük $x_0=0$ pontban. Az első derivált:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+x^2} \quad \rightarrow \quad \left.\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right|_{x_0} = \frac{1}{a}$$

A második derivált:

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} = -a\frac{1}{(a^2+x^2)^2}2x \quad \rightarrow \quad \left.\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right|_{x_0} = 0$$

A harmadik derivált (hányados deriválási szabályával):

$$\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} = -a\frac{2(a^2+x^2)^2 - 2x\cdot 2(a^2+x^2)2x}{(a^2+x^2)^4} \quad \rightarrow \quad \left.\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right|_{x_0} = -\frac{2a^5}{a^8} = -\frac{2}{a^3}$$

A negyedik derivált zérus, a többi tagot elhanyagoljuk.
A Taylor-sort felírva

$$\mathrm{arctg}\frac{x}{a} \approx 0 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{a}(x-0) + \frac{1}{2!}\cdot 0\cdot(x-0)^2 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{a^3}(x-0)^3 + -\ldots\ldots = \frac{x}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + -\ldots.$$

A hiba

$$\Delta\varphi = \mathrm{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{a} = \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + -\ldots.\right] - \frac{x}{a} \approx -\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3$$

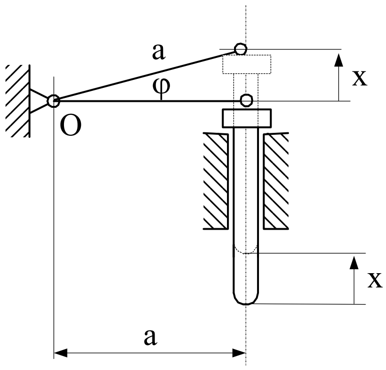
A relatív hiba

$$h=\frac{|\Delta\varphi|}{\varphi}=\frac{\left|-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3\right|}{\frac{x}{a}}=\frac{x^2}{3a^2}\quad\rightarrow\quad x=a\sqrt{3h}=20\sqrt{0{,}03}=\underline{\underline{3{,}46\ \text{mm}}}.$$

Ha a méréstartomány 3,46 mm, akkor a mutató szögelfordulásának determinisztikus hibája 1 százalékon belül marad.

4/2 Feladat

Határozza meg a szinusz mechanizmus determinisztikus hibáját, ha a bemenet a tapintó x elmozdulása, a kimenet az „a” hosszúságú kar φ szögelfordulása.



Segítség: a $\varphi=\frac{x}{a}$ lineáris összefüggést szeretnénk megvalósítani, de a mechanizmus ténylegesen $\varphi=\arcsin\frac{x}{a}$ összefüggést valósít meg. Fejtse Taylor-sorba ez utóbbi összefüggést x=0 környezetében, majd képezze a két kifejezés különbségét!