Műveletek komplex számokkal

A komplex számok alkalmazása nagyban egyszerűsíti számos műszaki probléma megoldását, különös tekintettel elektrotechnikai, rendszerelméleti és rezgéstani feladatokra. A következőkben csak a műszaki alkalmazások szempontjából fontos kérdések kerülnek átismétlésre.

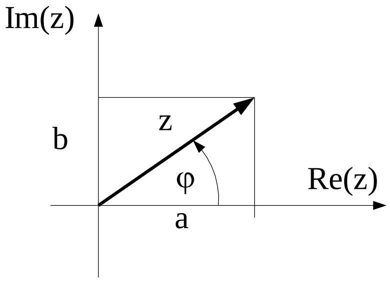
Definíciók:	Következmény	Igazolás
a) Képzetes (imaginárius) egység		
$j = \sqrt{-1}$	$j^2 = -1$	
	$\frac{1}{j} = -j$	$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = -j$

b) Komplex szám

Algebrai alak

$z = a + jb$

Ábrázolás a komplex számsíkon:



Abszolút érték (a vektor hossza): $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Fázisszög (a valós tengellyel bezárt szög) $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

Trigonometrikus alak

$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ $\qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exponenciális alak (általában ezt használjuk)

$$\boxed{z = |z| e^{j\varphi}}$$

Az abszolút érték a komplex szám (vektor) hosszát, az $e^{j\varphi}$ *formálisan a vektor vízszintes tengellyel bezárt* φ *szögét mutatja. Figyelem! A* φ *radiánban értendő!*

Bizonyítás:

Induljunk ki a trigonometrikus alakból $\qquad z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

Az egységnyi hosszú komplex szám $\qquad z_0 = \frac{z}{|z|} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

Deriváljuk mindkét oldalt φ szerint

$$\frac{dz_0}{d\varphi} = (-\sin\varphi + j\cos\varphi) = (j^2\sin\varphi + j\cos\varphi) = j(\cos\varphi + j\sin\varphi) = jz_0$$

A változókat szeparáljuk

$$\frac{dz_0}{z_0} = jd\varphi$$

Mindkét oldalt integráljuk

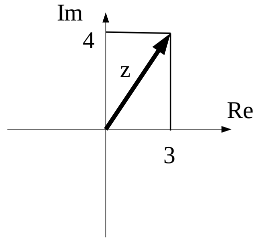
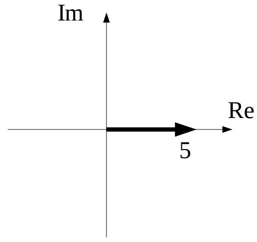
$$\ln z_0 = j\varphi$$

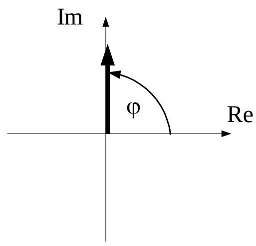
$$z_0 = e^{j\varphi}$$

Ha a vektor hossza nem egységnyi, akkor értelem szerűen

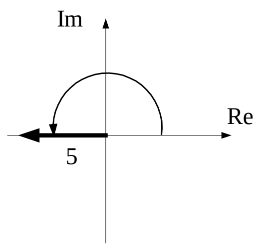
$$z = |z| \cdot z_0 = |z| \cdot e^{j\varphi}$$

Példák:

Algebrai alak	Trigonometrikus alak	Exponenciális alak
$z = 3 + 4j$	$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{4}{3} = 0{,}927$ rad $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $z = 5(\cos 0{,}927 + j\sin 0{,}927)$	 $z = 5e^{j0{,}927}$
z=5	z=5(cos0+jsin0)	$z = 5e^{j0}$ 
z=j	$z = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$	$z = 1e^{j\frac{\pi}{2}}$



$z = -5$ $\qquad$ $z = 5(\cos\pi + j\sin\pi)$ $\qquad$ $z = 5e^{j(\pi)}$



Komplex számok osztása

$$z = \frac{3+4j}{5+6j} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}\,e^{j0,927}}{\sqrt{5^2+6^2}\,e^{j0,876}} = 0,640e^{j(0,927-0,876)} = 0,64e^{j0,051}$$

exponenciális alak

Fázisszög= számláló fázisszöge-nevező fázisszöge!

Bővítés konjugálttal….

$$z = \frac{3+4j}{5+6j} = \frac{3+4j}{5+6j}\cdot\frac{5-6j}{5-6j} = \frac{39+2j}{25+36} = \frac{39}{61} + \frac{2}{61}j$$

algebrai alak

Szinuszos gerjesztés

$$u = 12\sin 314t = 12\,\mathrm{Im}(e^{j314t})$$

$$u = 12\cos(314t+\varphi) = 12\,\mathrm{Re}[e^{j(314t+\varphi)}]$$

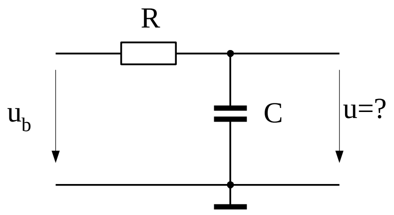
Példa

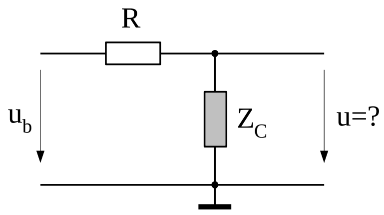
Az ábrán látható RC tagra (aluláteresztő szűrőre) $u_b = 12\sin 314t$ (V) váltakozó feszültséget kapcsolunk.

a) Határozzuk meg az állandósult kimenő feszültséget, ha R=1kΩ és C= 10μF!

($\hat{u}_b = 12\,\mathrm{V};\ \omega = 314\ \ \mathrm{rad/s}$)

b) Rajzoljuk meg a be- és a kimenő feszültség időbeli változását!





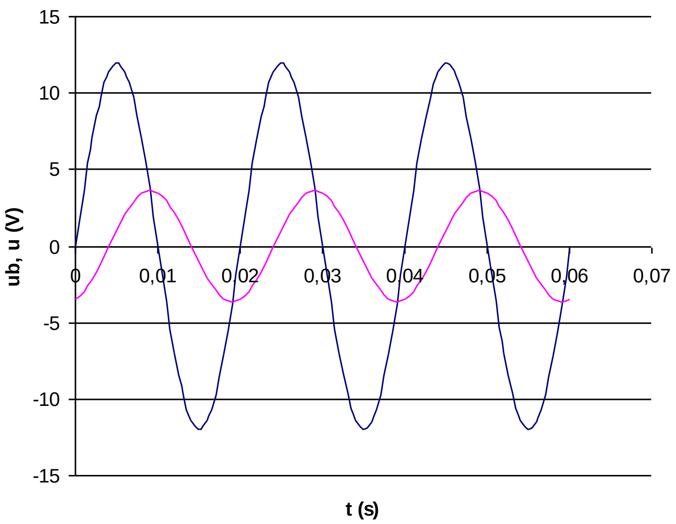
Váltakozó áramú körben a kondenzátor nem szakadásként, hanem komplex ellenállásként (impedanciaként) viselkedik. A kondenzátor váltakozó áramú ellenállása (impedanciája) $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$. Ennek ismeretében a feladat analóg (hasonló) a terheletlen feszültségosztóval. A kimenő feszültség

$$u = \frac{Z_C}{R + Z_C} u_b = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} u_b = \frac{1}{RC\omega j + 1} \hat{u}_b \operatorname{Im} e^{j\omega t} = \frac{\hat{u}_b \operatorname{Im} e^{j\omega t}}{\sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}\, e^{j\operatorname{arctg}\frac{RC\omega}{1}}} =$$

$$= \frac{\hat{u}_b}{\sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}} \cdot \operatorname{Im} e^{j(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{RC\omega}{1})} = \frac{12}{\sqrt{1 + (10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 314)^2}} \sin(314t - \operatorname{arctg} 10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 314) =$$

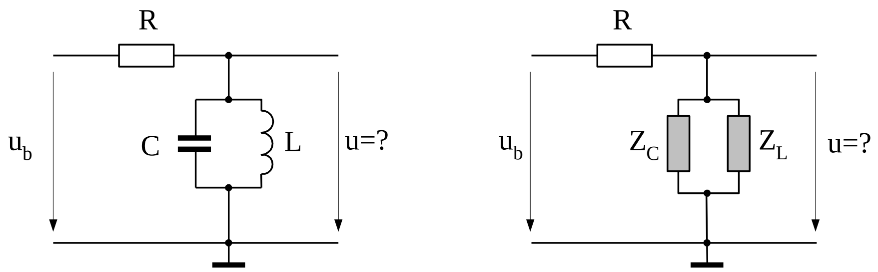
$$= \underline{\underline{3{,}64 \sin(314t - 1{,}262\,\mathrm{rad})}}\ \ (\mathrm{V})$$

A kimenő feszültség késik a bemenő feszültséghez képest. (Adott időpillanatban még hátrébb tart)



Feladat

Határozza meg az ábrán látható kapcsolás kimenő és bemenő feszültség-amplitúdóinak arányát (az amplitúdó-nagyítást) a bemenő feszültség ω körfrekvenciájának függvényében! Legyen R=1 kΩ, C=10 μF és L=0,2H. A bemenő feszültség $u_b = \hat{u}_b \sin \omega t$.



A tekercs (induktivitás) komplex impedanciája váltakozó áramú körben $Z_L = j\omega L$. A párhuzamosan kapcsolt impedanciák eredője

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} \rightarrow Z = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

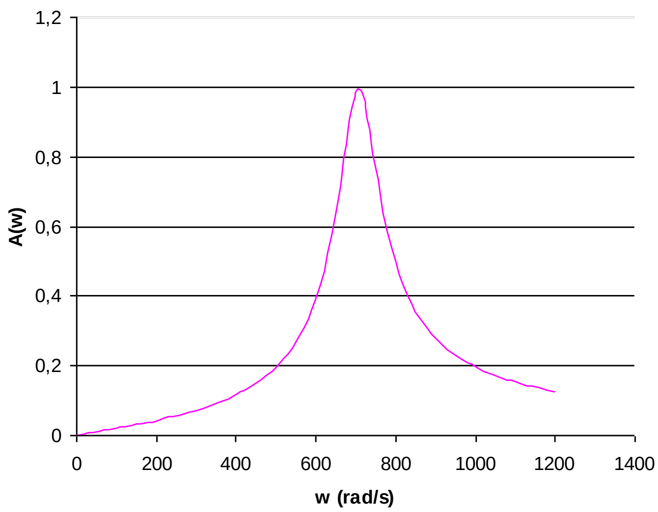
A terheletlen feszültségosztó összefüggésére visszavezetve

$$u = \frac{\frac{j\omega \mathrm{L}}{1-\omega^2 \mathrm{LC}}}{\mathrm{R}+\frac{j\omega \mathrm{L}}{1-\omega^2 \mathrm{LC}}} u_b = \frac{j\omega \mathrm{L}}{\mathrm{R}(1-\omega^2 \mathrm{LC}) + j\omega \mathrm{L}} u_b = \underbrace{\frac{\omega \mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{R}^2(1-\omega^2 \mathrm{LC})^2 + (\omega \mathrm{L})^2}}}_{A(\omega)} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{\omega \mathrm{L}}{\mathrm{R}(1-\omega^2 \mathrm{LC})}}} \hat{u}_b \mathrm{Im} e^{j\omega t}$$

A feladat szerint csupán az $A(\omega)$ amplitúdó nagyítást kell meghatározni, a fázisszög most nem kérdés. Az adatok behelyettesítésével

$$A(\omega) = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_b} = \frac{0{,}2\omega}{\sqrt{10^6(1-2\cdot 10^{-6}\omega^2)^2 + 0{,}04\omega^2}}$$

Az amplitúdó-nagyítási függvényt (a rezonancia görbét) Excellel számítjuk ki különböző bemenőjel frekvenciákra.

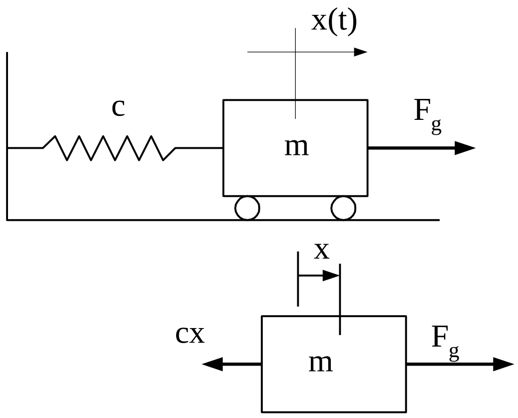


Az áramkör egy sávszűrő, mely a rezonancia frekvenciájú bemenő jelet teljesen átengedi, az annál kisebb és nagyobb frekvenciájú jelkomponenseket egyre kisebb mértékben engedi át.

Az áramkör rezonancia körfrekvenciáját abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy az A(ω) amplitúdó-nagyítás akkor maximális, amikor nevezője minimális. Az A(ω) nevezője akkor minimális, amikor $1-0{,}000002\omega^2=0$. Vagyis az áramkör rezonancia körfrekvenciája $\omega_{rez}=707$ rad/s, azaz $f_{rez}=112{,}6$ Hz.

Példa

Egy c=40000 N/m merevségű rugóból és m=5 kg tömegből álló lengőrendszert Fg=2000sin30t szinuszosan változó erővel gerjesztünk. Határozzuk meg a tömeg elmozdulásának állandósult időfüggvényét! (középiskola, harmonikus rezgőmozgás)



Free-body diagram

Mechanikus rendszer esetén haladó mozgáskor a $\sum F = ma$ összefüggést használjuk. ($a = \ddot{x}$)

Most

$$F_g - cx = m\ddot{x}$$

Rendezve

$$m\ddot{x} + cx = F_g$$

Komplex számokkal felírva a gerjesztést, az elmozdulást és a gyorsulást

$$F_g = \hat{F}_g \operatorname{Im} e^{j\omega t}$$

Feltételezzük, hogy csillapítatlan esetben az erő és az elmozdulás fázisban van

$$x = \hat{x} \operatorname{Im} e^{j\omega t}$$

$\dot{x} = \hat{x}(j\omega)\operatorname{Im} e^{j\omega t}$ (deriválás=jω-val való szorzás)

$\ddot{x} = \hat{x}(j\omega)^2\operatorname{Im} e^{j\omega t}$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe (rendszeregyenletbe)

$$m \cdot \hat{x}(j\omega)^2 \operatorname{Im} e^{j\omega t} + c \cdot \hat{x} \operatorname{Im} e^{j\omega t} = \hat{F}_g \operatorname{Im} e^{j\omega t}$$

Egyszerűsítés után

$$m \cdot \hat{x}(j\omega)^2 + c \cdot \hat{x} = \hat{F}_g$$

Innen a rezgés amplitúdója

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}_g}{c - m\omega^2} = \frac{2000}{40000 - 5 \cdot 30^2} = 0{,}056 \text{ m}$$

A tömeg kitérése az idő függvényében

$$x = \underline{\underline{0{,}056 \sin 30t}} \text{ (m)}$$