Fourier-sor

Periodikus függvények trigonometrikus sorba fejthetők. A sor tartalmazhat konstans tagot, amire az $\omega_0 = 2\pi/T$ alapharmonikus körfrekvenciájának egészszámú többszörösével oszcilláló, különböző amplitudójú szinuszos és koszinuszos tagok szuperponálódnak.

$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega t + ...) + (b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + a_3 \sin 3\omega t + ...)$$

Rövidebben írva

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Az egyes együtthatók az

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

Megjegyzések:

A Fourier-sorral szakadásos függvények (pl. PWM jel) is folytonos függvényekkel adhatók meg. Ez azzal az előnnyel jár, hogy egy hosszú periodikus jel értékét tetszőleges időpillanatban egyszerű, folytonos összefüggéssel határozhatjuk meg.

Ha a függvény páros, akkor a sor b_n együtthatói mind zérusok, illetve ha a függvény páratlan, akkor a sor a_n együtthatói zérusok. Ezért ha lehetséges, a függvényt úgy kell eltolni a koordinátarendszerben, hogy az vagy páros, vagy páratlan legyen.

Az együtthatók számításánál az integrálási határok tetszőlegesen választhatók (0 és T; -T/2 és T/2, stb) a lényeg, hogy legfeljebb egy teljes T periódus legyen az integrálás határainak különbsége. Amennyiben a függvény a perióduson belül zérus szakaszokkal is rendelkezik, az integrálási határok tovább csökkenthetők.

Az eddig elmondottak időfüggvényekre vonatkoztak, de a t változó helyett bármely más fizikai változó is elképzelhető.

PÉLDA

Gyakori periodikus jel a „k” kitöltési tényezőjű, állandó amplitúdójú négyszögjel sorozat (PWM). Határozzuk meg a jel Fourier-sorának együtthatóit egységnyi amplitúdó és k=0,3 kitöltési tényező esetén.

A jel középértéke

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{kT}{2}}^{+\frac{kT}{2}} 1dt = \frac{1}{T}[t]_{-\frac{kT}{2}}^{+\frac{kT}{2}} = k$$

A koszinuszos tagok együtthatói

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{kT}{2}}^{+\frac{kT}{2}} 1\cdot\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{\frac{n2\pi}{T}}\left[\sin(n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-\frac{kT}{2}}^{+\frac{kT}{2}} = \frac{2}{n\pi}\sin(nk\pi)$$

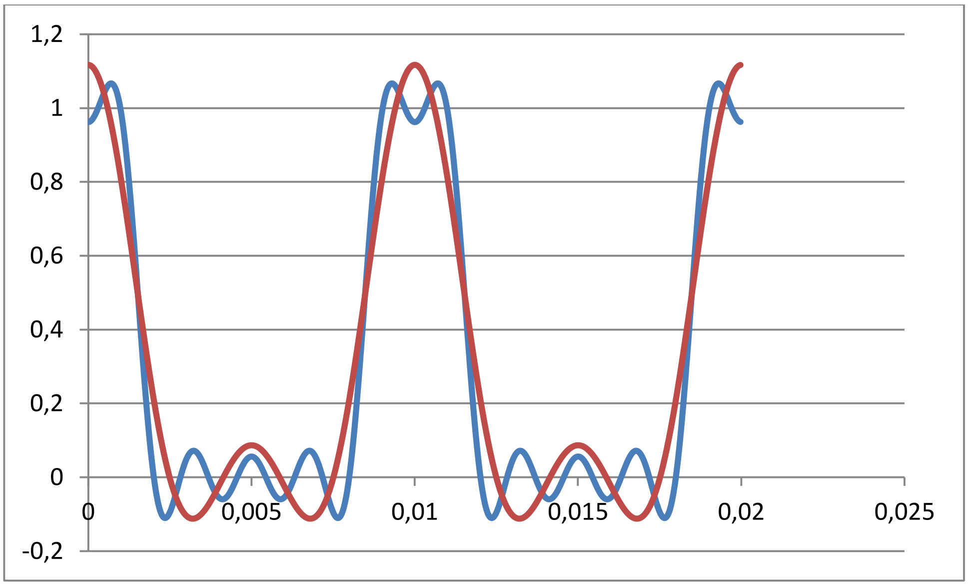
Különböző n-értékekre és k=0,3 kitöltési tényezőre a felharmonikusok együtthatói

a_2=0,515 a_3=0,302 a_4=0,065 a_5=-0,093 a_6=-0,127.

A négyszögjel-sorozat Fourier sora 100 Hz frekvencia (T=0,01 s periódusidő) esetén

$$f(t) = 0{,}3 + 0{,}515\cos(628t) + 0{,}302\cos(1256t) + 0{,}065\cos(1884t) - 0{,}093\cos(2512t) - 0{,}127\cos(3140t)....$$

A jel Fourier-sora látható az ábrán 3, illetve 6 taggal közelítve.



Általában a felharmonikusok amplitúdói csökkennek, ezért a sorozat első néhány tagjának figyelembe vétele már kielégítő pontosságú eredményt ad. Ugyanakkor éles átmenetű függvényeknél (mint a példában bemutatott PWM jelnél is), magasabb sorszámú felharmonikusokat is figyelembe kell venni.

Szokásos a felharmonikusok együtthatóinak $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ abszolút értékét ábrázolni a körfrekvencia függvényében, ami a jel frekvencia spektruma. Frekvencia összetevők csak diszkrét értékeken, az alapharmonikus frekvencia többszörösein vannak jelen, ezért a **frekvencia spektrum „vonalas”**.

PÉLDA

Gyakori periodikus gerjesztő jel az egyutasan egyenirányított harmonikus (szinusz vagy koszinusz) függvény. Feladat a függvény Fourier-sorának maghatározása.

Célszerűségi okokból a jel amplitúdóját válasszuk egységnyinek. Azért, hogy a jelet páros függvényként tekinthessük, toljuk el a koordinátarendszerben. Vegyük észre, hogy a –T/2 és +T/2 periódus határok az integrálás során tovább csökkenthetők –T/4 és +T/4 értékekre, mivel csak ebben a tartományban különbözik a függvény zérustól.

A jel középértéke:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} \cos(\frac{2\pi}{T}t)dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\left[\sin(\frac{2\pi}{T}t)\right]_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} = \frac{1}{\pi}$$

Az alapharmonikus jelösszetevő együtthatója a koszinusz-négyzet függvény integrálásával

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} \cos(\frac{2\pi}{T}t)\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} \frac{1+\cos(2\cdot\frac{2\pi}{T}t)}{2}dt = \frac{1}{T}\left\{\left[t + \frac{\sin 2\cdot\frac{2\pi}{T}t}{2\cdot\frac{2\pi}{T}}\right]_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}}\right\} = \frac{1}{2}$$

A felharmonikusok együtthatóit a középiskolában tanult

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

trigonometrikus azonosság segítségével számítjuk:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} \cos(\underbrace{\frac{2\pi}{T}t}_{\beta})\cdot\cos(\underbrace{n\cdot\frac{2\pi}{T}t}_{\alpha})dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} \frac{\cos(\frac{2\pi(n+1)}{T}t)+\cos(\frac{2\pi(n-1)}{T}t)}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2} + \frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

Különböző n-értékekre az együtthatók rendre a következők:

$$a_2 = \frac{2}{3\pi} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = -\frac{2}{15\pi} \quad a_5 = 0 \quad a_6 = \frac{2}{35\pi} \quad ......$$

A függvény Fourier-sora tehát

$$f(t) \approx \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{2\pi}{T} t) + \frac{2}{3\pi} \cdot \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{T} t) - \frac{2}{15\pi} \cdot \cos(4 \cdot \frac{2\pi}{T} t) + \frac{2}{35\pi} \cos(6 \cdot \frac{2\pi}{T} t) \ldots\ldots$$

Példa

Példaként tekintsük egy AC/DC átalakító működését. Határozzuk meg az egyutasan egyenirányított AC feszültség RC taggal való simítása után kialakuló állandósult kimenő feszültséget!

A 12V csúcsértékű és 50 Hz frekvenciájú egyutasan egyenirányított jel Fourier-sora az előzőekben levezetett összefüggést felhasználva

$$u_b(t) = 12\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \cos(314t) + \frac{2}{3\pi} \cdot \cos(628t) - \frac{2}{15\pi} \cdot \cos(942t) + \ldots \right) =$$
$$= 3{,}82 + 6\cos(314t) + 2{,}54\cos(628t) - 0{,}51\cos(942t) + \ldots$$

Ezt a jelet működtessük az R=10 kΩ és C=2 μF értékű elemekből álló kapcsolásra. A tag átviteli függvénye

$$Y(j\omega) = \frac{1}{RC\omega j + 1} = \frac{1}{1 + 0{,}02\omega j} \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (0{,}02\omega)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,0{,}02\omega$$

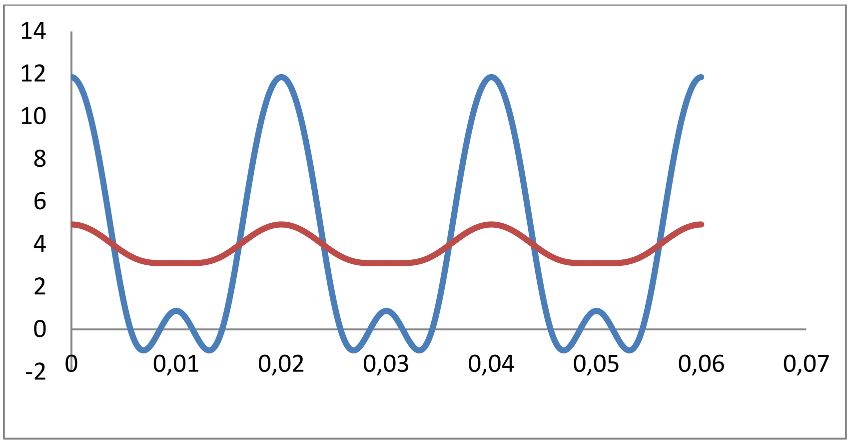
A számítást a **szuperpozíció elve** alapján, táblázatosan végezzük. Meghatározzuk az egyes bemenőjel komponensekre adott válaszokat a **frekvencia módszerrel**, majd végül ezeket összegezzük:

$$u_{áll}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{A(n\omega_0)\hat{u}_{bn}}_{\hat{u}_n} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

n	$\omega = n\omega_0$	$\hat{u}_{bn}$	$A(n\omega_0)$	$\hat{u}_n = A(n\omega_0)\hat{u}_{bn}$	$\varphi_n(\omega)$
0	0	3,82	1	3,82	0
1	314	6	0,157	0,94	-1,41
2	628	2,54	0,079	0,20	-1,49
3	942	-0,51	0,053	-0,027	-1,51
.	.	.	.	.	.

A kimenő feszültség:

$$u(t) = 3{,}82 + 0{,}94\cos(314t - 1{,}41) + 0{,}2\cos(628t - 1{,}49) - 0{,}027\cos(942t - 1{,}51) + \ldots..$$



Az ábrán a bemenő (kék) és a kimenő (piros) feszültséget ábrázoltuk.

PÉLDA

Dugattyús szivattyú folyadékszállítása nagyon hasonló az egyutasan egyenirányított váltakozó feszültséghez. A folyadékszállítás egyenletesebbé tételére tartályt (vagy légüstöt) használnak.

Határozzuk meg a Q_{max}=0,002 m^3/s folyadékszállítású, ω=160 rad/s szögsebességű szivattyú térfogatáramát simítás után, ha a tartály alapterülete A=0,0003 m^2, a kifolyócső hidraulikai ellenállása $R_h = 4 \cdot 10^6$ kg/sm^4 .

A simító tartályba befolyó térfogatáram (felhasználva az előző példában meghatározott együtthatókat):

$$Q_b(t) = 0{,}002\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\cos(160\,t) + \frac{2}{3\pi}\cdot\cos(320\,t) - \frac{2}{15\pi}\cdot\cos(480\,t) + \ldots\right) =$$
$$= 0{,}00063 + 0{,}001\cos(160\,t) + 0{,}00042\cos(320\,t) - 0{,}00008\cos(480\,t) + \ldots \qquad (m^3/s)$$

A simító tag (tartály) egyenlete:

$$C_h\frac{d(\rho g h)}{dt} + \frac{\rho g h}{R_h} = Q_b(t)$$

Frekvencia-átviteli függvénye:

$$Y(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{Q_b(j\omega)} = \frac{R_h}{\rho g + A R_h \omega j}$$

Amplitúdó nagyítása $A(\omega) = \dfrac{R_h}{\sqrt{(\rho g)^2 + (A R_h \omega)^2}}$, fázistolása $\varphi(\omega) = 0 - \operatorname{arctg}\dfrac{A R_h \omega}{\rho g}$

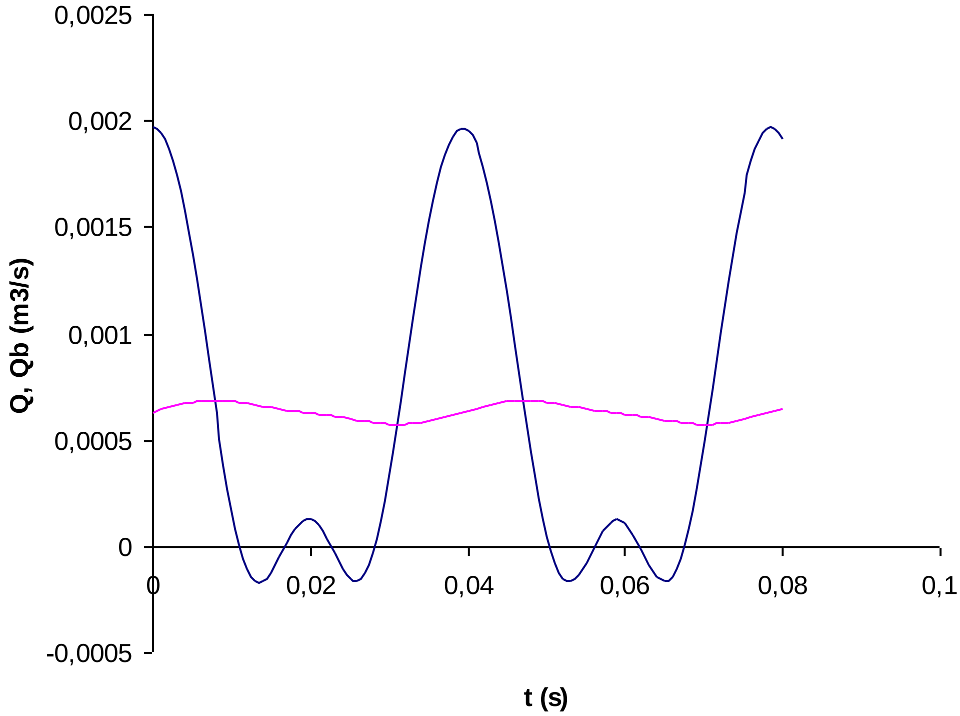
A számítást táblázatosan végezzük az előző példához hasonlóan

n	$\omega = n\omega_0$	$\hat{Q}_{bn}\ (m^3/s)$	$A(n\omega_0)$	$\hat{h}_n = A(n\omega_0)\hat{Q}_{bn}$	$\hat{Q}_n = \frac{\rho g \hat{h}_n}{R_h}$	$\varphi_n(\omega)$
0	0	0,00063	400	0,252	0,00063	0
1	160	0,001	20,80	0,0208	0,000052	-1,518
2	320	0,00042	10,41	0,0043	0,000010	-1,544
3	480	-0,00008	6,94	-0,0005	-0,000001	-1,553
.	.	.	.	.		.

A térfogatáram simítás után

$$Q(t) = 0{,}00063 + 0{,}000052\ \cos(160t - 1{,}518) + 0{,}00001\ \cos(320t - 1{,}544) - 0{,}000001\ \cos(480t - 1{,}553) + ..$$

A simítás hatására a térfogatáram ingadozása kevesebb, mint 10 százalék!



Vegyük észre, hogy az egyenirányítás utáni villamos simítás és a szivattyú térfogatáramának simítása teljesen hasonló probléma volt, ezért ezek analóg rendszereknek tekinthetők.