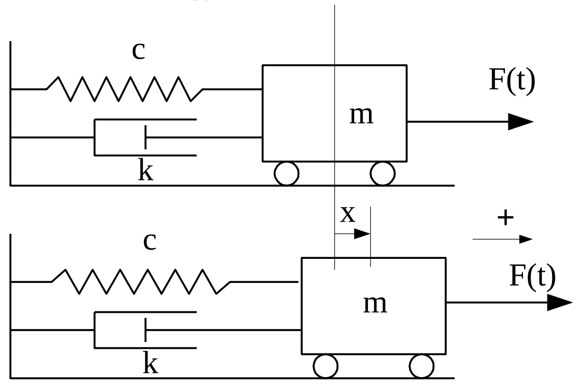
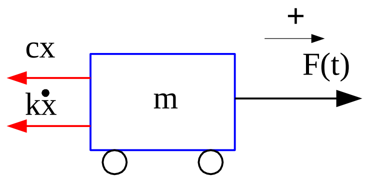
Másodrendű rendszer viselkedése időtartományban

A rendszeregyenlet felírása kanonikus alakban

Az alábbi másodrendű rendszer adatai m=2 kg, c=32 N/m, k=4 Ns/m.
Írjuk fel a rendszeregyenletet és hozzuk kanonikus (szokásos, szabályos) alakra!



Rendszer egyensúlyi helyzetbõl x-szel kimozdítva



Vizsgált testtel értintkezõ testek (rugó, csillapító) elhagyva, hatásuk erõvel pótolva

Felírjuk a $\sum F = ma$ mozgásegyenletet:

$$F(t) - cx - k\dot{x} = m\ddot{x}$$

Rendezés után

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t)$$

Baloldalon a kimenet és annak deriváltjai, jobb oldalon a gerjesztés van. Kanonikus alak esetén a második derivált együtthatója egységnyi, a keresett függvény együtthatója α^2, az első derivált együtthatója $2D\alpha$.:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2D\alpha}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\alpha^2}x = f(t)$$

A másodrendű rendszert mechanikus elemekkel mutattuk be, de általánosságban a két jellemzőjével adható meg: a „D” Lehr-csillapítással és az α csillapítatlan saját-körfrekvenciával
Így **mechanikus, villamos, hidraulikus rendszereket egységes matematikai apparátussal vizsgálhatunk**.

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f(t)$$

A lineáris differenciálegyenlet általános megoldása a homogén és a partikuláris megoldás összege.

A) A homogén differenciálegyenlet (gerjesztetlen rendszer) megoldása idő tartományban

$$\ddot{x}_h + 2D\alpha\dot{x}_h + \alpha^2 x_h = 0$$

A megoldást $x_h = Ae^{st}$ alakban keressük. A feltételezett megoldást és deriváltjait a differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$As^2e^{st} + 2D\alpha Ase^{st} + \alpha^2 Ae^{st} = 0$$

$$Ae^{st}(s^2 + 2D\alpha s + \alpha^2) = 0$$

„s” értékét a karakterisztikus egyenletből határozzuk meg:

$$s^2 + 2D\alpha s + \alpha^2 = 0$$

Az egyenletet s-re megoldva

$$s_{1,2} = \frac{-2D\alpha \pm \sqrt{4D^2\alpha^2 - 4\alpha^2}}{2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1} \qquad (1)$$

A homogén differenciálegyenlet megoldása ezzel a két megoldás lineáris kombinációja:

$$\boxed{x_h = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}}$$

D értékétől függően a megoldás négyfelé ágazik attól függően, hogy a gyökjel alatt pozitív, vagy negatív szám áll!

D=0 D>1 0<D<1 D=1

a) D=0 Harmonikus rezgőmozgás (Állandó amplitúdójú rezgőmozgás, középiskola)

Az (1) egyenletből $s_{1,2} = \pm j\alpha$

A megoldás ezzel.

$$x_h(t) = A_1e^{j\alpha_1 t} + A_2e^{-j\alpha t} = \ldots = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t = \underline{\underline{K\sin(\alpha t + \varphi)}} \qquad (2)$$

Harmonikus rezgés állandó K amplitúdóval, α körfrekvenciával és φ fázisszöggel.

1. Példa

$\ddot{x} + 16x = 0$ (D=0) $\alpha = 4$ $(1/s)$

Kezdeti feltételek: x(0)=1 és $\dot{x}(0) = 0$ (kezdeti kitérés 1m, kezdősebesség zérus)

FIGYELEM! Másodrendű differenciálegyenlet esetén két kezdeti feltételt kell megadni!

$x(t) = K\sin(4t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = K4\cos(4t + \varphi)$

A t=0-nál lévő kezdeti feltételekkel

$1 = K\sin\varphi \qquad \rightarrow K = 1$

$0 = 4K\cos\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = \pi/2$

A megoldás

$$x(t) = 1\sin(4t + \pi/2) = \underline{\underline{\cos 4t.}}$$

b) D>1 Túlcsillapított rendszer (aperiodikus beállás)

$$s_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1}$$

Mindkét pólus valós. A megoldás ezzel

$$x_h = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = \underline{\underline{A_1 s^{(-D\alpha + \alpha\sqrt{D^2-1})t} + A_2 e^{(-D\alpha - \alpha\sqrt{D^2-1})t}}} \tag{3}$$

Lengés nélküli beállás (pozícionáló rendszer, voltmérő mutatója, repülőgép landolása, stb.)

2. Példa

$$\ddot{x} + 8{,}8\dot{x} + 16 = 0$$

Kezdeti feltételek: x(0)=1 $\dot{x}(0) = 0$ (kezdeti kitérés 1m, kezdősebesség zérus)

$\alpha = 4 \ (1/s)$ és $D = 1{,}1$

$$s_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1} = -4{,}4 \pm 1{,}83 = \begin{cases} -2{,}57 \\ -6{,}23 \end{cases}$$

A megoldás ezzel

$$x_h = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{-2{,}57t} + A_2 e^{-6{,}23t}$$

Az ismeretlen együtthatókat a kezdeti feltételekből határozzuk meg.

$1 = A_1 + A_2$

$0 = A_1(-2{,}57) + A_2(-6{,}83)$ Innen A_1=1,6 és A_2= -0,6

A megoldás

$$\underline{\underline{x(t) = 1{,}6e^{-2{,}57t} - 0{,}6e^{-6{,}23t}}}$$

c) D<1 Lengőképes rendszer (Beállás csillapodó rezgésekkel)

Az (1) egyenletben a gyökjel alatt negatív mennyiség van, a karakterisztikus egyenlet megoldásnak ezért képzetes része is lesz:

$$s_{1,2} = -D\alpha \pm j\alpha\sqrt{1 - D^2}$$

Új változókat vezetünk be:

$D\alpha = \beta$ A rezgés amplitúdójának csökkenését leíró exponenciális függvény kitevője

$\alpha\sqrt{1-D^2} = \gamma$ A csillapított rezgések tényleges, mérhető körfrekvenciája

$$s_{1,2} = -\beta \pm j\gamma$$

A megoldás ezzel

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta + j\gamma)t} + A_2 e^{(-\beta - j\gamma)t} = ... = \underline{\underline{K e^{-\beta t} \sin(\gamma t + \varphi)}} \qquad (4)$$

Ez γ körfrekvenciájú, csökkenő amplitúdójú, φ kezdőfázisú rezgés

3. Példa

$\hat{x} + 1{,}6\dot{x} + 16x = 0$ (D=0,2 α=4 rad/s)

Kezdeti feltételek: x(0)=1 $\dot{x}(0) = 0$ (kezdeti kitérés 1m, kezdősebesség zérus)

$\beta = D\alpha = 0{,}8 \quad 1/s$

$\gamma = \alpha\sqrt{1-D^2} = 3{,}92 \quad 1/s$

$$x(t) = K e^{-\beta t} \sin(\gamma t + \varphi) = K e^{-0{,}8t} \sin(3{,}92t + \varphi) \qquad (4.b)$$

K és φ értékét a kezdeti feltételekből határozzuk meg:

$1 = K \sin\varphi$

$0 = K(-0{,}8)\sin\varphi + K3{,}92\cos\varphi$

Innen K=1,02 és φ=1,369 rad.

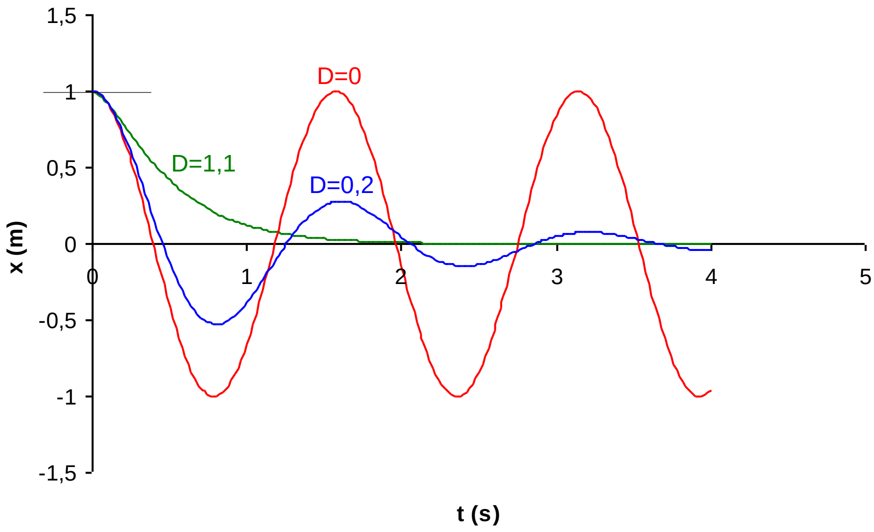
A megoldás

$$\underline{\underline{x(t) = 1{,}02 e^{-0{,}8t} \sin(3{,}92t + 1{,}369)}}$$

d) D=1 Ezzel a speciális esettel nem foglalkozunk részletesen. A megoldása

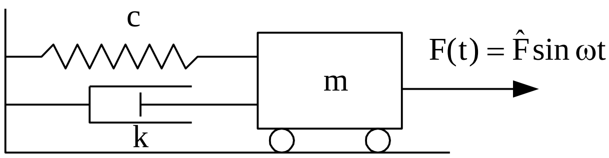
$$x(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}$$

Az előző példák megoldásai az ábrán láthatóak. Érdemes megfigyelni, hogy mindegyik görbe vízszintes érintővel indul, mivel a kezdő sebesség zérus volt. (dx/dt=0)



B) Másodrendű gerjesztett rendszer állandósult (partikuláris) megoldása

Csak a bekapcsolástól számított hosszabb idő eltelte után vizsgáljuk a rendszer viselkedését. Ilyenkor kezdeti feltételek nem kellenek, mert a tranziens úgyis elhal hosszabb idő után!



Szinuszos gerjesztéssel foglalkozunk:

$$F(t) = \hat{F} \sin \omega t$$

Legyen az erőgerjesztés komplex alakban megadva az egyszerűbb számítás kedvéért:

$$F(t) = \hat{F} \cdot e^{j\omega t}$$

Az állandósult kimenetet (partikuláris megoldást) fázisában eltolt szinusz függvényként tételezzük fel:

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\dot{x}(t) = \hat{x} \cdot (j\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\ddot{x}(t) = \hat{x} \cdot (j\omega)^2 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Az állandósult megoldásnak is ki kell elégítenie

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 = \frac{1}{m} F(t)$$

a differenciálegyenletet. A differenciálegyenletbe helyettesítve

$$\hat{x}\cdot(j\omega)^2 e^{j(\omega t+\varphi)} + 2D\alpha\hat{x}\cdot(j\omega)e^{j(\omega t+\varphi)} \; + \hat{x}\cdot(j\omega)e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{m}\hat{F}f\cdot e^{j\omega t}$$

Egyszerűsítve $e^{j\omega t}$-vel:

$$\hat{x}e^{j\varphi}[(j\omega)^2 + 2D\alpha(j\omega) + \alpha^2] = \frac{1}{m}\hat{F}$$

Képezzük a frekvencia-átviteli függvényt:

$$Y(j\omega) = \frac{\hat{x}}{\hat{F}}e^{j\varphi} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(j\omega)^2 + 2D\alpha(j\omega) + \alpha^2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2 + 4D^2\alpha^2\omega^2}\cdot e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{2D\alpha\omega}{\alpha^2\omega^2}}}$$

Vezessük be a gerjesztő és a sajátfrekvencia arányára az „r" viszonyszámot

$$r = \frac{\omega}{\alpha}$$

valamint az

$$\hat{x}_{stat} = \frac{\hat{F}}{c}$$

statikus elmozdulást (a rugó hossza ennyivel változna, ha a rendszerre $\hat{F}$ konstans erővel hatnánk).

Ekkor

$$\frac{\hat{x}}{\hat{x}_{stat}}e^{j\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4D^2r^2}}e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{2Dr}{1-r^2}}$$

Összehasonlítva az egyenlőség két oldalát, az $A(\omega) = |Y(j\omega|$ amplitúdó nagyítás (a kimenő szinuszjel amplitúdója hányszorosa a bemenő szinuszjel amplitúdójának)

$$A(r(\omega)) = \frac{\hat{x}}{\hat{x}_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4D^2r^2}} \qquad (5)$$

A fázistolás pedig

$$\varphi(r(\omega)) = -\mathrm{arctg}\frac{2Dr}{1-r^2}$$

4. Példa

Legyen a 3. Példa F(t)=10sin20t (N) erőgerjesztéssel.

$$\ddot{x} + 1{,}6\dot{x} + 16x = \frac{1}{m}\cdot 10\sin 20t$$

$(D = 0{,}2; \quad \alpha = 4\ \mathrm{rad/s}; \quad \omega = 20\ \mathrm{rad/s}; \quad \hat{F} = 10\ \mathrm{N}; \quad m = 2\ \mathrm{kg})$

A rugó statikus hosszváltozása:

$$\hat{x}_{stat} = \frac{\hat{F}}{c} = \frac{10}{32} = 0{,}3125\ \mathrm{m}$$

A gerjesztő- és a sajátfrekvencia aránya:

$$r = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{20}{4} = 5$$

Az amplitúdó-nagyítás:

$$A(r(\omega)) = \frac{\hat{x}}{\hat{x}_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4D^2r^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-5^2)^2 + 4\cdot 0{,}2^2 \cdot 5^2}} = 0{,}0415$$

A kimenet amplitúdója:

$$\hat{x} = A(\omega)\hat{x}_{stat} = 0{,}0415 \cdot 0{,}3125 = 0{,}0129 \quad \text{m}$$

A fázistolás:

$$\varphi(r(\omega)) = -\text{arctg}\frac{2Dr}{1-r^2} = -\text{arctg}\frac{2\cdot 0{,}2\cdot 5}{1-5^2} = -3{,}058 \quad \text{rad}$$

(Vigyázat, vizsgálni kell, hogy a szög melyik síknegyedben van!)
Az állandósult (partikuláris) megoldás ezzel

$$x_p(t) = 0{,}0129\sin(20t - 3{,}058) \tag{6}$$

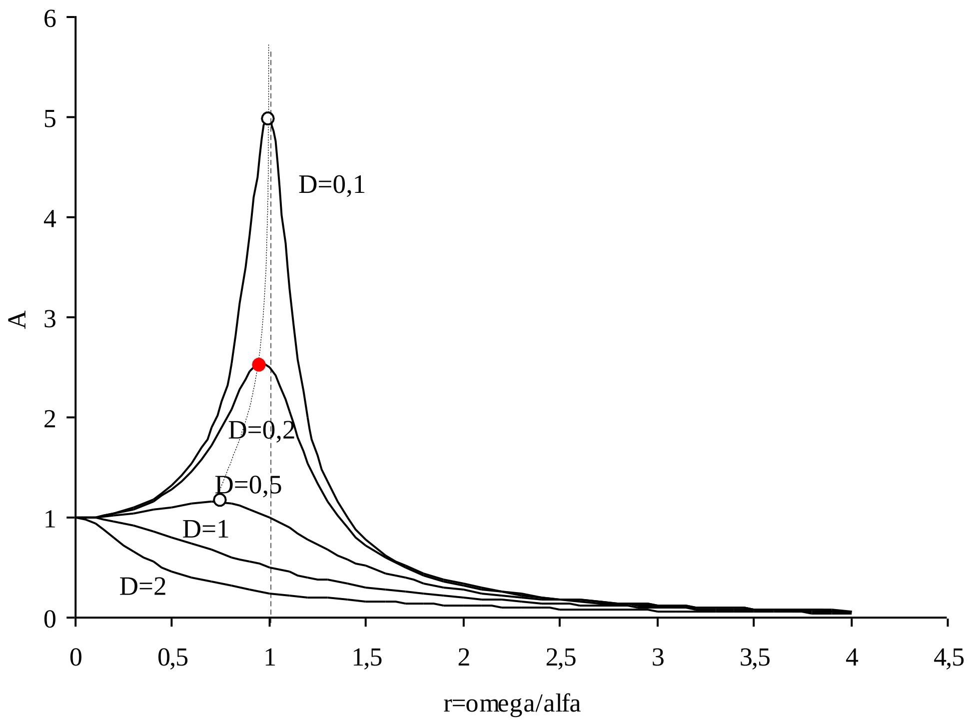
Rezonancia

Vizsgáljuk meg, hogy mekkora gerjesztő frekvenciánál lenne maximális az állandósult kitérés!
Az (5) egyenlet szerinti $A(r(\omega))$ amplitúdó-nagyítási függvénynek a maximumát keressük. Ott van maximum, ahol a nevező minimális:

$$\frac{d}{dr}\left[(1-r^2)^2 + 4D^2r^2\right] = 0$$

$$2(1-r^2)(-2r) + 8D^2r = 0 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{1-2D^2} = \sqrt{1-2\cdot 0{,}2^2} = 0{,}959$$

Amennyiben a csillapítás nem zérus, a rezonancia az α sajátfrekvenciánál valamivel kisebb ω körfrekvencián következik be!



(Emlékezzünk, hogy harmonikus rezgőmozgásnál rezonancia akkor lépett fel, amikor a gerjesztés körfrekvenciája éppen megegyezett a rendszer sajátfrekvenciájával)

Jelen esetben rezonancia akkor következne be, amikor a gerjesztés körfrekvenciája

$$\omega = r \cdot \alpha = 0{,}959 \cdot 4 = 3{,}836 \quad \text{rad}/\text{s}$$

lenne. Az amplitúdó nagyítás maximuma ekkor

$$A_{max} = \frac{1}{\sqrt{(1-0{,}959^2)^2 + 4 \cdot 0{,}2^2 0{,}959^2}} = 2{,}55$$

lenne, ami az ábrán a D=0,2 csillapításnál jól látszik.

A rezonanciát általában kerülni kell, hogy megóvjuk a szerkezetet a túl nagy erőktől és alakváltozásoktól.

C) Másodrendű rendszer általános megoldása

A gerjesztés t=0 időpillanatban kezd működni, akár zérustól különböző kezdeti feltételek is lehetnek, a rendszer válaszát a bekapcsolás pillanatától kezdve vizsgáljuk.

5. Példa

Legyen adva 3. példa $x_0 = 0$ és $\dot{x}_0 = 0$ kezdeti feltételekkel és F(t)=10sin20t gerjesztéssel!

Mind a homogén egyenlet megoldása, mint a partikuláris megoldás ismert előzetes számításainkból:

$$x_h(t) = Ke^{-0{,}8t} \sin(3{,}92t + \varphi) \tag{4.b}$$

$$x_p(t) = 0{,}0129 \sin(20t - 3{,}058) \tag{6}$$

Az általános megoldás a homogén és a partikuláris megoldás összege:

$$x(t) = Ke^{-0,8t}\sin(3{,}92t + \varphi) + 0{,}0129\sin(20t - 3{,}058)$$

A kezdeti feltételeket csak legvégül, az <u>általános megoldás felírása után</u> határozzuk meg:

x(0)=0 $\quad 0 = K\sin(\varphi) + 0{,}0129\sin(-3{,}058)$

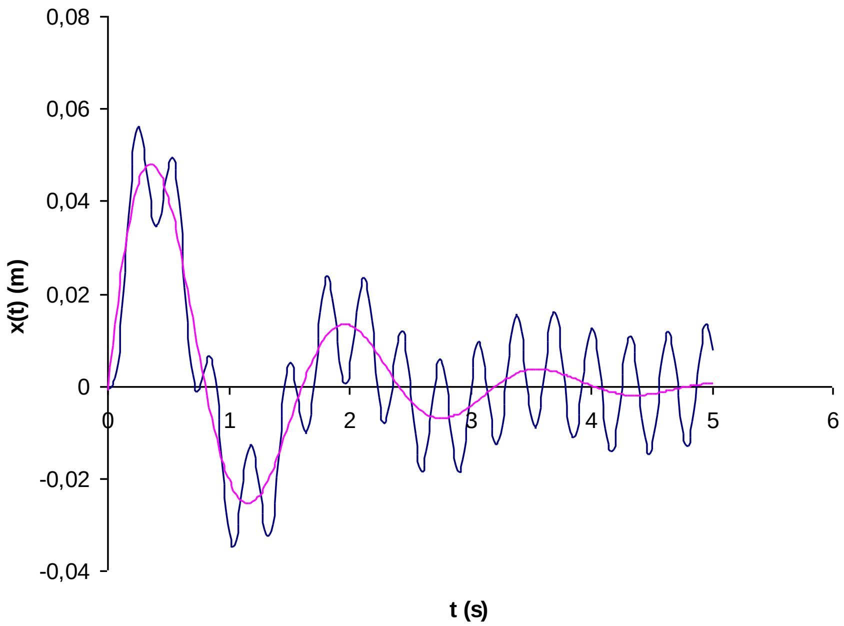
v(0)=0 $\quad 0 = K(-0{,}8)\sin\varphi + K3{,}92\cos\varphi + 0{,}0129\cdot 20\cos(-3{,}058)$

Innen K=0,0653 és φ=-0,0163 rad

A keresett általános megoldás:

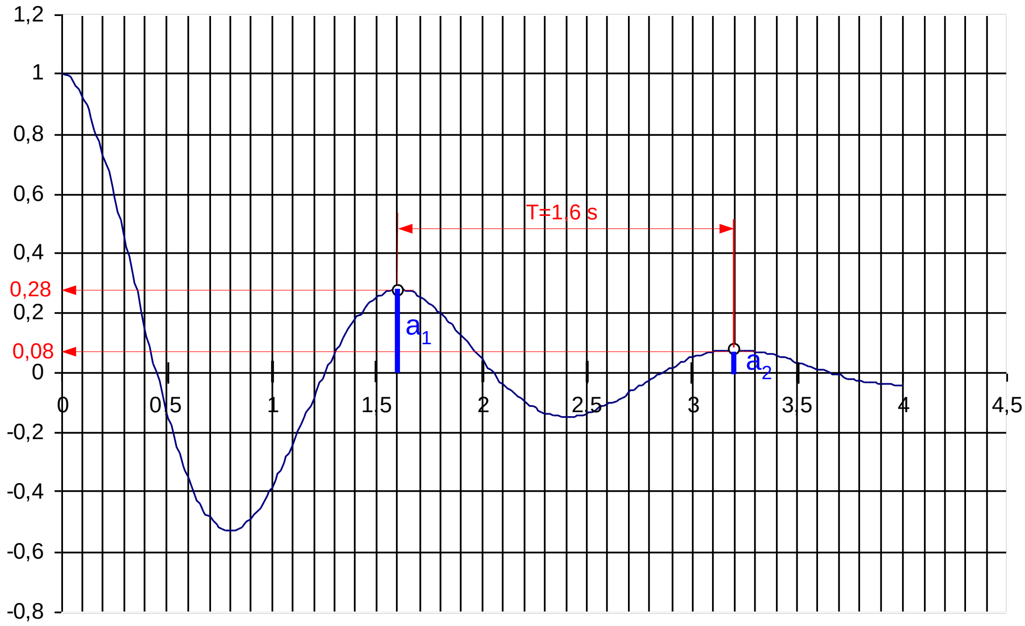
$$x(t) = \underbrace{0{,}0653e^{-0,8t}\sin(3{,}92t - 0{,}0163)}_{\text{tranziens}} + \underbrace{0{,}0129\sin(20t - 3{,}058)}_{\text{állandósult}}$$

Az általános megoldás az ábrán látható. A pirossal jelölt tranziens rész idővel elhal és csupán a partikuláris megoldás marad fenn. A rendszer ekkor a gerjesztés körfrekvenciájával rezeg.



Másodrendű rendszer paraméter-identifikációja

Cél a rendszer bizonyos paramétereinek meghatározása mérési eredményekből.
A módszert a lengőképes rendszer 3. Példáján mutatjuk be. Tételezzük fel, hogy a rendszert egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk és felvesszük a rezgésgörbét valamilyen regisztráló műszerrel. Ebből a görbéből határozzuk meg a rendszer legfontosabb paramétereit (D és α).



A (4) egyenletet használjuk fel.

$$x_h(t) = Ke^{-\beta t}\sin(\gamma t + \varphi)$$

A rezgés periódusideje a regisztrátumból (két csúcs távolsága)

$$T=1{,}6 \text{ s}$$

A rezgés csillapított (tényleges, mérhető) sajátfrekvenciája

$$\gamma = \frac{2\pi}{T} = 3{,}925 \quad \text{rad/s}$$

A rezgésmaximumok esetén a szinusz függvény értéke 1. Képezzük két egymás utáni maximum arányát:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{Ke^{-\beta(t_1+T)}}{Ke^{-\beta t_1}} = e^{-\beta T}$$

Logaritmizálva

$$-\beta T = \ln\frac{a_2}{a_1} = \lambda$$

(λ neve logaritmikus dekrementum). Innen az exponens kitevő

$$\beta = \frac{\ln\frac{a_2}{a_1}}{-T} = \frac{\ln\frac{0{,}08}{0{,}28}}{-1{,}6} = 0{,}782$$

Ismert továbbá, hogy

$$\beta = D\alpha$$

$$\gamma = \alpha\sqrt{1-D^2}$$

Négyzetre emelve és összeadva a két kifejezést kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}}$$

$$\alpha = \sqrt{0{,}782^2 + 3{,}925^2} = \underline{\underline{4{,}002}} \quad \text{rad/s}$$

$$D = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{0{,}782}{4{,}002} = \underline{\underline{0{,}195}}$$

Ezzel sikerült meghatározni a másodrendű rendszer két jellemzőjét. Összehasonlítva a 3. példa kiinduló adataival (α=4 és D=0,2), a mérési eredményből visszaszámolt paraméterek kielégítő pontosságúak. Az eltérés oka a leolvasási pontatlanság.