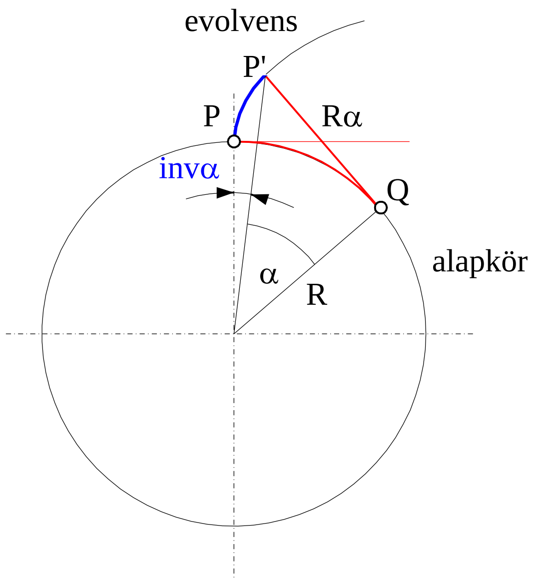
Numerikus példák

Egyenletek gyökének megoldása

Példa

A megoldandó feladat háttereként bemutatjuk a műszaki problémát, mely fogaskerekek evolvens fogprofiljának származtatása során merül fel.

Az alapkörön legördülő (piros) egyenes P pontja evolvens görbét ír le. Az evolvens PP' szakasza alatti középponti szöget involut alfának (invα) nevezzük



Írjuk fel a PQ ívhossz és a P'Q szakasz egyenlőségét:

$$R(\mathrm{inv}\alpha + \alpha) = R \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

Innen

$$\mathrm{inv}\,\alpha = \mathrm{tg}\alpha - \alpha$$

Feladat:

Adott invα=0,1 rad. Határozzuk meg α értékét!

Megoldandó tehát a

$$0{,}1 = \mathrm{tg}\alpha - \alpha$$

transzcendens egyenlet!

Megoldás

a) Érintő módszer

Keressük az

$$y(x) = \mathrm{tg}x - x - 0{,}1$$

függvény zérushelyét.

A függvény deriváltja

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

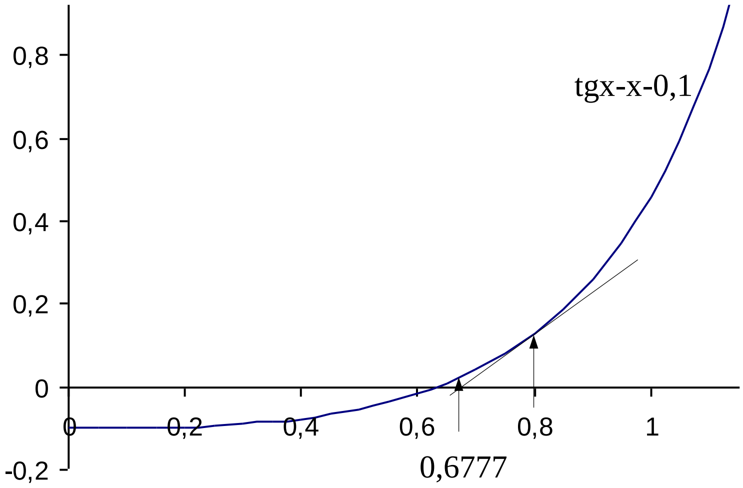
Legyen a kezdő érték x_0=0,8

$y_0(0{,}8) = \text{tg}0{,}8 - 0{,}8 - 0{,}1 = 0{,}1296$

$y_0'(0{,}8) = \dfrac{1}{\cos^2 0{,}8} - 1 = 1{,}0601$

Az egyenlet első közelítő gyöke

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} = 0{,}8 - \frac{0{,}1296}{1{,}0601} = 0{,}6777$$



Megismételve az eljárást

$y_1(0{,}6777) = \text{tg}0{,}6777 - 0{,}6777 - 0{,}1 = 0{,}0271$

$y_0'(0{,}6777) = \dfrac{1}{\cos^2 0{,}6777} - 1 = 0{,}6478$

Az egyenlet második közelítő gyöke

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{y'_1} = 0{,}6777 - \frac{0{,}0271}{0{,}6478} = 0{,}6358$$

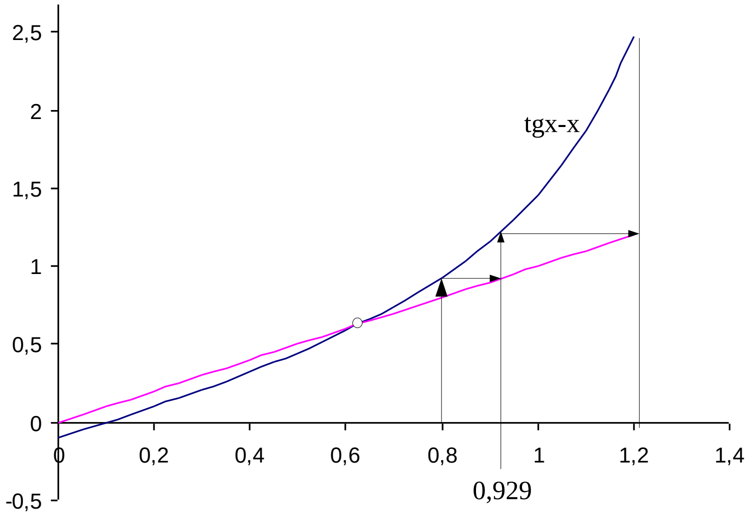
stb. Látható, hogy a két gyök már alig különbözik, az eljárás gyorsan konvergál. Amennyiben pontosabb megoldásra van szükségünk, az eljárást még néhányszor megismételjük.

b) Iteráció

A megoldandó egyenletet $x = f(x)$, azaz

$$x = \text{tg}x - 0{,}1$$

alakra hozzuk.



Kezdjük az iterációt ismét x=0,8 értékkel.

$$x_1=\mathrm{tg}0{,}8-0{,}1=0{,}929$$
$$x_2=\mathrm{tg}0{,}929-0{,}1=1{,}239$$

Látható, hogy az iteráció jelen esetben nem konvergens, mivel a gyök közelében az

$$f(x)=\mathrm{tg}x-0{,}1$$

függvény deriváltja $\left.\dfrac{1}{\cos^2 x}\right|_{x=0,63}=1{,}53>1$. A feladatot iterációval nem lehet megoldani.

Feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenlet nem triviális gyökét érintő módszerrel, $x_0=1$ kezdőértékkel:

$$x^2-\sin x=0$$

Megoldás:

$x_1=0{,}8914$

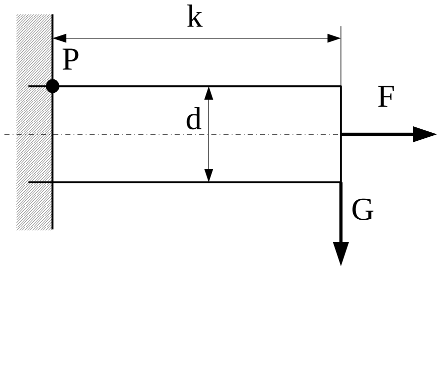
$x_2=0{,}8770$

$x_3=0{,}8762$

Feladat

A mérnöki praxisban gyakran fordul elő magasabb fokszámú egyenlet gyökének (gyökeinek) számítása. Egy elemi szilárdságtani probléma szolgáljon erre példaként.

Egy kör keresztmetszetű, k=200 mm hosszú befogott rudat F=1000 N húzóerő és G=50 N függőleges erő terhel. Határozza meg a befogási keresztmetszet szükséges átmérőjét, ha a rúd anyagára megengedett feszültség $\sigma_{meg}=200$ N/mm^2. (A számítást kezdje d=10 mm értékkel!)



Segítség: a befogási keresztmetszet igénybevétele húzás+hajlítás, a keresztmetszet P pontjában maximális a feszültség.

$$\sigma = \frac{F}{d^2\pi/4} + \frac{Gk}{d^3\pi/32}$$

Az adatok helyettesítése után a numerikusan megoldandó hiányos harmadfokú egyenlet:

$$0{,}157\,d^3 - d + 80 = 0$$

Megoldás érintő módszerrel:

d1=8,546

d2=8,263

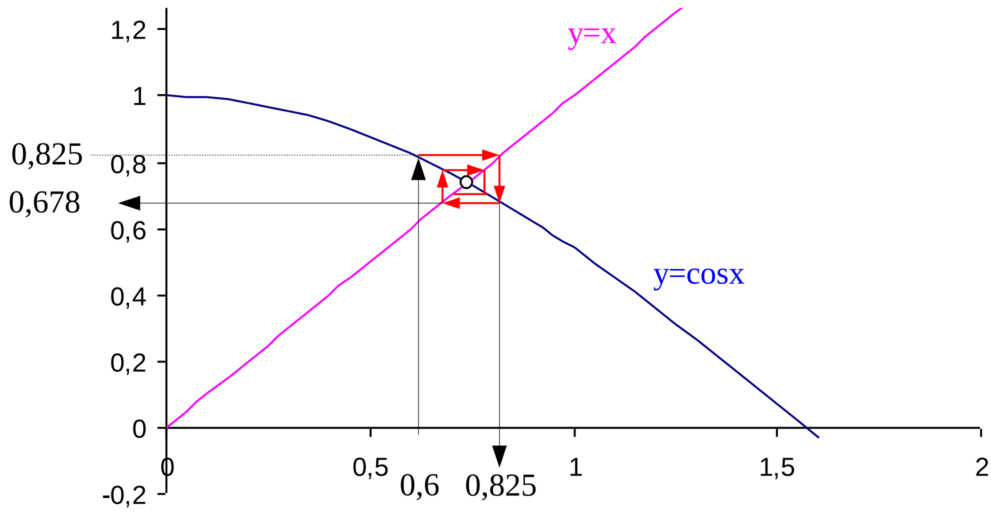
d3=8,252 (a pontosság fokozásának nincs értelme)

Feladat

Oldja mg iterációval az

$$x = \cos x$$

transzcendens egyenletet x=0,6 kezdő értékkel!



Megoldás:

x=0,825

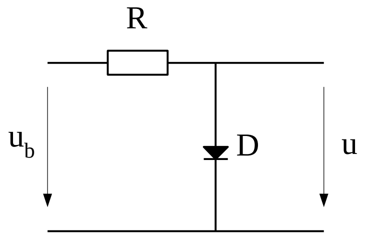
x=0,678

………..

x=0,739

Feladat

Adott az ábrán látható kapcsolás a következő adatokkal: R=1000 Ω, u_b=5 V. A dióda egyenlete $i = 10^{-13} e^{\frac{u_d}{0{,}027}}$.



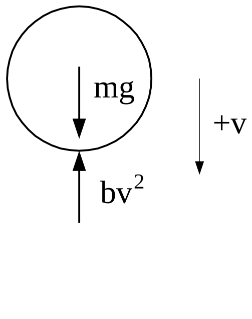
Határozza meg a kimenő feszültséget a rendszeregyenlet numerikus megoldásával, érintő módszerrel. Kezdje a számítást u_0=0,7 értékkel.

Megoldás:
u_1=0,679
u_2=0,666
u=0,661

Differenciálegyenletek numerikus megoldása

Példa.
Egy m=0,0002 kg tömegű esőcsepp a felhőből kezdősebesség nélkül kezd esni. Az esőcseppre ható légellenállás a sebesség négyzetével arányos, b=0,0005 N/(m/s)^2 ellenállási tényezővel. Határozzuk meg az esőcsepp sebességének v(t) időbeli változását!

Megoldás
Az esőcsepp free-body diagramja



A $\sum F = m \cdot a$ mozgásegyenlet:

$$mg - bv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

Az

$$m\dot{v} + bv^2 = mg$$

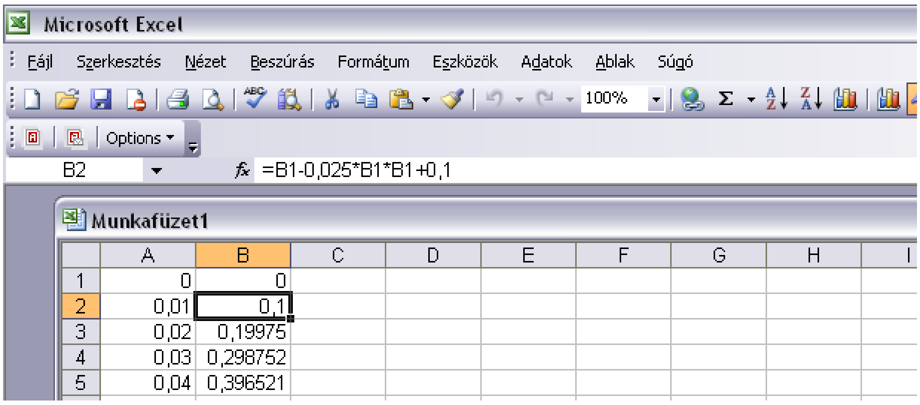
nemlineáris differenciálegyenletet numerikusan oldjuk meg T=0,01 s idő lépésközzel. Átírva a differenciálegyenletet differencia-egyenletté:

$$m\frac{v_{i+1}-v_i}{T}+bv_i^2=mg$$

A rekurzív algoritmus (előzőleg kiszámított értékből számítva az új értéket)

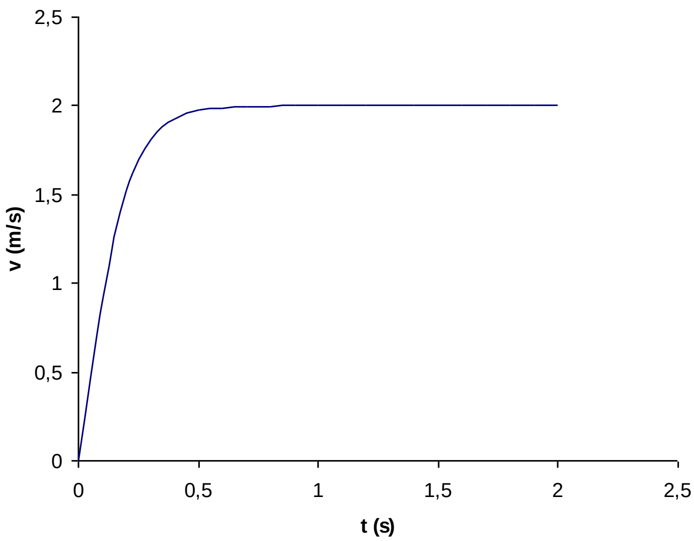
$$v_{i+1}=v_i-0{,}025v_i^2+0{,}1$$

Az algoritmust Excellel könnyen számíthatjuk. Az A oszlopba a T=0,01 s idő lépésközzel számított idő sorozatot írjuk, míg a B oszlop első sorába a kezdő sebességet (0), a második sorába pedig az fx=B1-0,025*B1*B1+0,1 rekurzív algoritmust gépeljük.



A számítás eredménye az alsó diagramon látszik. Láthatóan a sebesség egy állandósult értékhez közeledik, melyet az esőcsepp már kb. 1 másodperc alatt elér. Az állandósult sebességet egyszerűen megkapjuk, ha a differenciálegyenletben a sebesség idő szerinti deriváltját zérusnak vesszük (a sebesség már nem változik = a gyorsulás zérus). Innen

$$v_{áll}=\sqrt{\frac{mg}{b}}=\sqrt{\frac{0{,}0002\cdot 10}{0{,}0005}}=2\ \ m/s.$$



Megjegyzés

A nemlineáris mozgásegyenlet analitikusan is megoldható némi erőfeszítés árán. A változókat szeparálva

$$\frac{dv}{g-\frac{b}{m}v^2}=dt$$

A feladat $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a}+C$ típusú integrálra vezethető vissza $a=\sqrt{\frac{mg}{b}}$ új változó bevezetésével. A részletek mellőzésével a sebesség analitikus összefüggése

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{b}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gb}{m}}\cdot t\right),$$

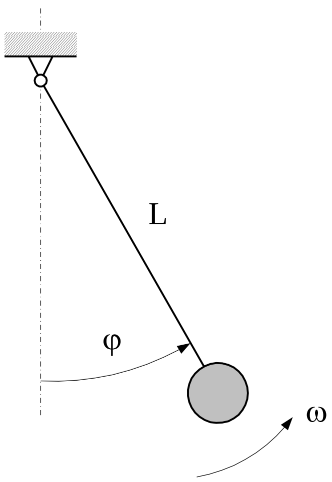
ami az adatok behelyettesítése után

$$v(t)=2\cdot\tanh(5\cdot t)$$

Az analitikus és a numerikus megoldás grafikonja vonalvastagságon belül halad, a numerikus megoldás a választott lépésközzel kielégítő pontosságú.

Példa
Matematikai inga mozgása nagy kitérések esetén

Egy L=1m hosszú matematikai ingát $\varphi_0=0{,}4$ radián szöghelyzetből ω_0=0,6 rad/s szögsebességgel indítunk.



Határozzuk meg az inga szögkitérésének időfüggvényét numerikusan, T=0,05 s idő lépésközzel!

Megoldás
Az inga szögkitérésének differenciálegyenlete

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0$$

A differencia-egyenlet

$$\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{T^2} + \frac{g}{L} \sin \varphi_i = 0$$

Rendezés és az adatok behelyettesítése után a rekurzív algoritmus

$$\varphi_{i+1} = 2\varphi_i - 0{,}025 \sin \varphi_i - \varphi_{i-1}$$

Az algoritmus az aktuális, valamint az előző szögkitérés értékeiből számítja a következő időponti szögkitérést. Jelen esetben az a probléma, hogy egy szög és egy szögsebesség érték adott a két szögkitérés helyett. Ahhoz, hogy az algoritmus képes legyen elindulni, a kezdő szögsebességet szögkitérések különbségeként kell megadnunk. Alkalmazzuk a szögsebesség közelítő numerikus formuláját (hátra haladó differencia hányados)

$$\omega_0 \approx \frac{\varphi_0 - \varphi_{-1}}{T},$$

ahonnan $\varphi_{-1} = \varphi_0 - \omega_0 T = 0{,}4 - 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}37\,\mathrm{rad}$.

Vagyis úgy tekintjük, mintha a mozgás megindulása előtt T idővel ismernénk az inga szögkitérését.

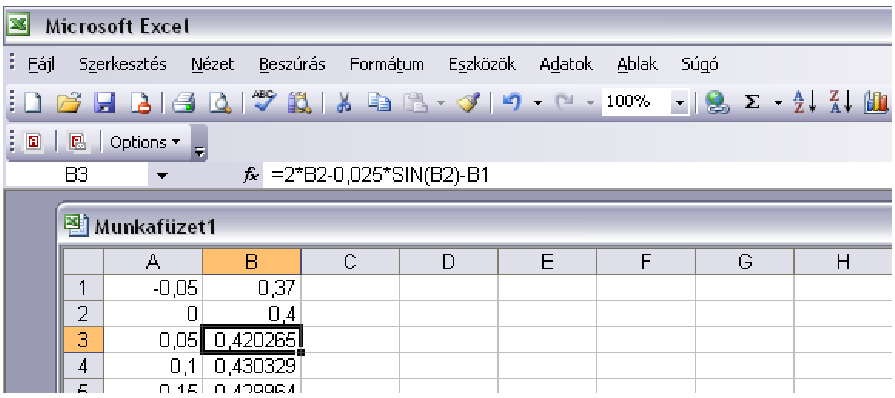
Az algoritmus a $\varphi_{-1} = 0{,}37$ és $\varphi_0 = 0{,}4$ értékek ismeretében már el tud indulni.

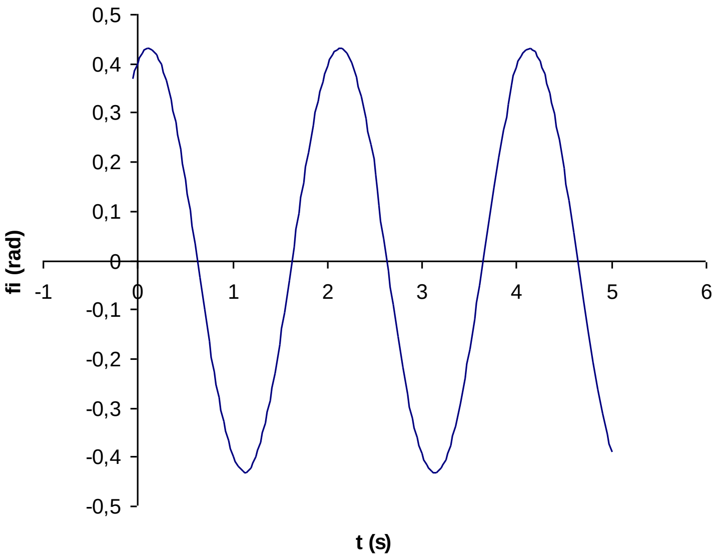
Megjegyzés: az alkalmazott T idő lépésköz periodikus mozgás esetén a periódusidő 30-ad, 40-ed részére választandó. Jelen esetben a periódusidő közelítőleg 2 s, így az idő lépésköz célszerű értéke T=0,05 s.

A számítást step-by-step végezzük.

t	φ_{i-1}	φ_i	φ_{i+1}
-0,05		0,37	0,4
0,00	0,37	0,4	0,42026
0,05	0,4	0,42026	0,43032
0,10	0,42026	0,43032	0,42995

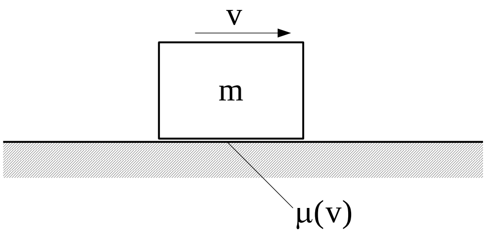
A grafikont Excellel rajzoltatjuk meg az előző példához hasonlóan.





Feladat

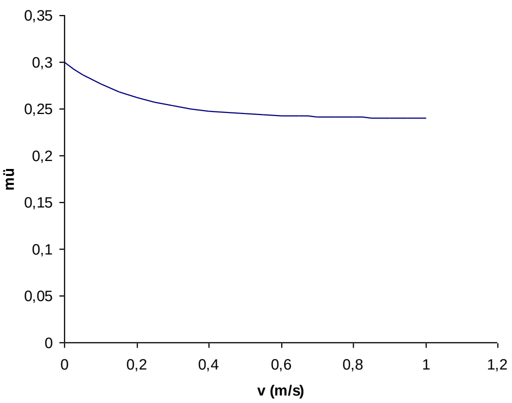
Egy m tömegű test v_0=1 m/s kezdősebességgel kezd csúszni egy érdes, vízszintes felületen.



Mint ismert, a mozgásbeli súrlódási tényező kisebb, mint a nyugalmi súrlódási tényező. A kettő közötti átmenetet sebességfüggő súrlódási tényezővel írhatjuk le a

$$\mu(v) = 0{,}3 \cdot (0{,}8 + 0{,}2 \cdot e^{-\frac{v}{0{,}2}})$$

(Stribeck) törvényszerűség szerint.

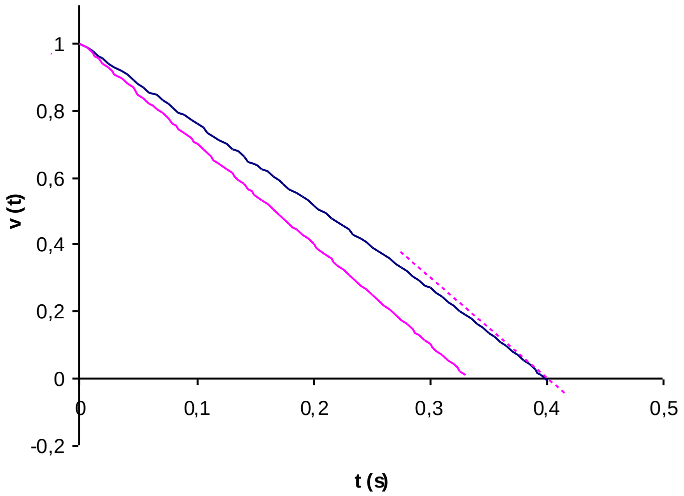


Határozza meg a test sebességének időbeli változását numerikusan, T=0,005 s idő lépésközzel, a test megállásáig! Hasonlítsa össze a megoldást a $\mu = 0{,}3$ állandó, sebesség-független súrlódási tényezővel számított megoldással!

Megoldás

Piros: $\mu = $ állandó, egyenes.

Kék: $\mu = \mu(v)$, változó meredekségű görbe



A mozgás sebességfüggő súrlódási tényező esetén tovább tart.