Rendszeregyenlet megoldása Laplace-transzformációval

Időfüggvény Laplace-transzformáltja definíciószerűen:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Függvények Laplace transzformáltjainak táblázata.

	f(t)	$\mathcal{L}$[f(t)]=F(s)
1	$\delta(t)$	1
2	1(t)	$\frac{1}{s}$
3	$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	konvolúció $\int_0^t f(t-T)g(T)dT$	F(s)G(s)
9	eltolás 1(t-T)	$\frac{1}{s}e^{-sT}$
10	$\frac{\alpha}{\gamma}e^{-\beta t}\sin\gamma t\,;(\gamma = \alpha\sqrt{1-(\beta/\alpha)^2})$	$\frac{\alpha}{s^2+2\beta s+\alpha^2}$
11	$Ke^{-\beta t}\sin(\gamma t+\varphi)$	$\frac{K(\sin\varphi \cdot s+(\beta\sin\varphi+\gamma\cos\varphi)}{s^2+2\beta s+(\beta^2+\gamma^2)}$

Műveletek Laplace-transzformáltjai:

a) *Integrálás* (s-sel való osztás)

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

b) *Deriválás* (s-sel való szorzás-kezdeti feltétel)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

c) *Végérték-tétel*

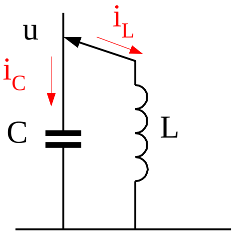
$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$,ha F(s) nevezője gyökeinek valós részei mind negatívak, vagy közülük egy gyök az origóban van.

Laplace-transzformáció előnye:

-a differenciálegyenletet algebrai egyenletre vezeti vissza
-a speciális gerjesztőjeleket (Dirac-delta, ugrásfüggvény, stb.) is egyszerűen kezeli
-az általános (teljes) megoldást adja, mivel a kezdeti feltételeket a deriváláskor már figyelembe vette

Hátránya:
-csak lineáris rendszerekre alkalmazható
-az idő tartományba való visszatranszformálás néha nehézkes (parciális törtekre bontás)

Példa
Határozzuk meg a kondenzátor feszültségének időbeli lefolyását, ha azt egy tekerccsel sütjük ki. Adatok: C=2 μF; L=0,1 H; u(0)=10 V.



A csomóponti törvényt felírva

$$C\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}\int udt = 0$$

Deriválva, hogy differenciálegyenletet nyerjünk

$$C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{L}u = 0$$

Laplace-transzformálva.(deriváláskor a kezdeti feltételeket figyelembe véve)

$$C[s^2U(s)-su_0-\frac{du_0}{dt}]+\frac{1}{L}U(s)=0$$

Rendezés után

$$U(s)[LCs^2+1]=LCsu_0-LC\frac{du_0}{dt}$$

$$U(s)=\frac{LCu_0s}{LCs^2+1}-\frac{LC\overbrace{\frac{du_0}{dt}}^{0}}{LCs^2+1}$$

Itt a második kezdeti feltétel $\frac{du_0}{dt}=0$, mivel kisütés előtt a kondenzátor terheletlen, a rajta átfolyó áram $i_C(0)=C\frac{du}{dt}=0$, vagyis a feszültség deriváltja kezdetben zérus.

Vegyük észre, hogy cos(ωt) Laplace-transzformáltja van elrejtve a kifejezésben

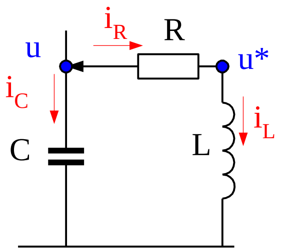
$$U(s)=\frac{LCu_0 s}{LCs^2+1}=\frac{LCu_0 s}{LC(s^2+\frac{1}{LC})}=u_0\frac{s}{s^2+\underbrace{(\frac{1}{LC})}_{\omega^2}}$$

Idő tartományba visszatranszformálva a táblázat felhasználásával: $u(t)=\mathcal{L}^{-1}U(s)$

$$u(t)=u_0\cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)=\underline{\underline{10\cos(2236\,t)}}$$

Példa

Az előző példát kiegészítjük a tekercs R=5Ω ohmikus ellenállásával.



Először csomópontokat kell felvenni ott, ahol az áramkörben a keresztváltozó (feszültség) értéke megváltozik. Mivel az ellenálláson és a tekercsen is esik feszültség, ezért nyilvánvaló, hogy az ellenállás és a tekercs között a feszültség se nem u, se nem 0, hanem valami más közbenső érték, amit jelöljünk u*-gal. Így két csomóponti egyenletet írhatunk fel:

$$C\frac{du}{dt}+\frac{u-u^*}{R}=0$$

$$\frac{u-u^*}{R}-\frac{1}{L}\int u^* dt=0$$

A differenciálegyenlet-rendszert most úgy oldjuk meg, hogy az egyenleteket Laplace-transzformálva visszavezetjük algebrai egyenletekre, majd az algebrai egyenletrendszert egyszerűen megoldjuk. Végül az eredményt visszatranszformáljuk idő tartományba.

$$C[sU(s)-u_0]+\frac{U(s)-U^*(s)}{R}=0$$

$$\frac{U(s)-U^*(s)}{R}-\frac{1}{L}\cdot\frac{U^*(s)}{s}=0 \quad\rightarrow\quad U^*(s)=\frac{Ls}{Ls+R}U(s)$$

Fejezzük ki U*(s)-t az alsó egyenletből, majd helyettesítsük a felsőbe:

$$U(s)=\frac{u_0 s+(R/L)u_0}{s^2+(R/L)s+(1/LC)}$$

Vegyük észre, hogy a Laplace-transzformáltak táblázatában található ilyen típusú függvény:

$$f(t) = Ke^{-\beta t}\sin(\gamma t + \varphi) \quad \leftrightarrow \quad F(s) = \frac{K\sin\varphi \cdot s + (K\beta\sin\varphi + K\gamma\cos\varphi)}{s^2 + 2\beta s + (\beta^2 + \gamma^2)}$$

Az „s”együtthatóit összehasonlítva:

$$2\beta = \frac{R}{L} \quad \rightarrow \quad \beta = 25 \ \ s^{-1}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = \frac{1}{LC} \quad \rightarrow \quad \gamma = 2236 \quad s^{-1}$$

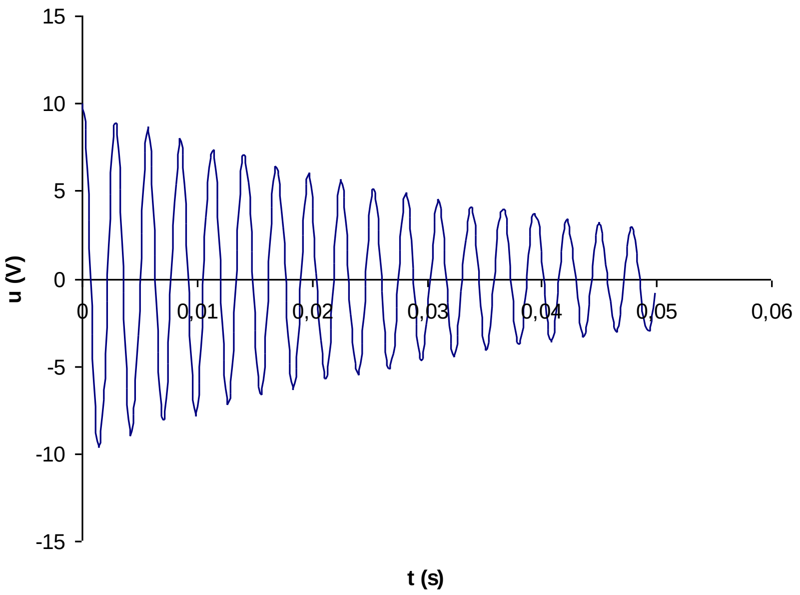
$$K\sin\varphi = u_0 \quad \rightarrow \quad K\sin\varphi = 10$$

$$K\beta\sin\varphi + K\gamma\cos\varphi = \frac{R}{L}u_0 \quad \rightarrow \quad K\cos\varphi = 0{,}1118$$

K=10,063 és φ=1,458 rad

A megoldás

$$u(t) = \underline{\underline{10{,}063e^{-25t}\sin(2236t + 1{,}458)}}$$



Megjegyzés: A feladat egyszerűsége miatt az idő tartományban is megoldható. Fejezzük ki az első egyenletből u*-ot és írjuk be a második egyenletbe

$$C\frac{du}{dt} + \frac{u - u^*}{R} = 0 \quad \rightarrow \quad u^* = RC\dot{u} + u$$

$$\frac{u - (RC\dot{u} + u)}{R} - \frac{1}{L}\int(RC\dot{u} + u)dt = 0 \quad \rightarrow \quad -C\dot{u} - \frac{1}{L}RCu - \frac{1}{L}\int udt = 0$$

Deriváljuk az egyenletet, hogy differenciálegyenletet kapjunk

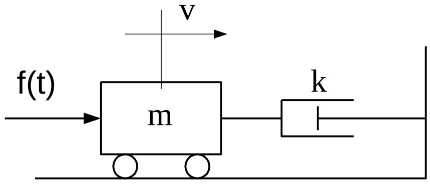
$$LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Innen a megoldás menete már ismert:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{és} \quad 2D\alpha = \frac{R}{L}\text{, Stb.} \ \ u(t) = Ke^{-\beta t}\sin(\gamma t + \varphi)$$

Példa

Az m=2 kg tömegű kocsi v_0=3 m/s sebességgel halad, mikor f(t)=5δ_F(t) Dirac-delta erő-gerjesztés éri. A csillapítás k=4 Ns/m. Határozzuk meg a kocsi sebességét az idő függvényében!



A mozgásegyenlet

$$f(t) - kv = m\frac{dv}{dt}$$

A rendszeregyenlet

$$m\frac{dv}{dt} + kv = 5 \cdot \delta(t)$$

Laplace-transzformálva.

$$m[sV(s) - v_0] + kV(s) = 5 \cdot 1$$

Rendezve

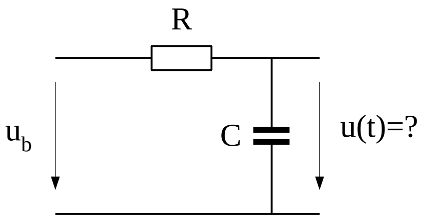
$$V(s) = \frac{5 + mv_0}{ms + k} = \frac{5 + mv_0}{m(s + \frac{k}{m})} = \frac{5 + mv_0}{m} \cdot \frac{1}{s + \frac{k}{m}} = 5{,}5\frac{1}{s + 2}$$

A táblázatból visszatranszformálva idő tartományba

$$v(t) = \underline{\underline{5{,}5 \cdot e^{-2t}}}$$

Példa

Az RC áramkört 10·1(t) V bemenő feszültségre kapcsoljuk. A kondenzátor feszültsége bekapcsolás előtt 3V volt. Határozzuk meg a kimenő feszültség időbeli változását, ha RC=0,01 s!



A csomóponti egyenletet felírva

$$\frac{u_b - u}{R} - C\frac{du}{dt} = 0$$

Rendezve

$$RC\frac{du}{dt} + u = u_b$$

Laplace-transzformálva

$$\tau[sU(s)-u_0]+U(s)=\frac{10}{s}$$

$$U(s)=\underline{\frac{10}{s(\tau s+1)}}+\underline{\underline{\frac{\tau\cdot u_0}{\tau s+1}}}$$

Az <u>első tagot</u> parciális (rész-) törtekre bontjuk, hogy a táblázatban található kifejezésekre ráismerjünk. Olyan törteket tételezünk fel, melyek a rendszer struktúrájának és a gerjesztésnek is megfelelnek. Elsőrendű rendszer válaszában kell lenni exponenciális tagnak, az állandó gerjesztés miatt pedig kell lenni a kimenetben konstans tagnak is.

$$\underline{\frac{\overbrace{10}^{*}}{s(\tau s+1)}}=\frac{A}{s}+\frac{B}{\tau s+1}=\frac{A\tau s+\overbrace{A}^{*}+Bs}{s(\tau s+1)}$$

Az ismeretlen A és B értékének meghatározását a számlálók „s" együtthatóinak összehasonlításával végezzük:

$s^0:\quad 10=A \qquad \rightarrow A=10 \qquad$ (csillaggal jelölve)

$s^1\quad 0=A\tau+B \qquad \rightarrow B=-A\tau=-0.1 \qquad$ (s – t tartalmazó tag a bal oldalon nincs)

Ezzel a vizsgált kifejezést sikerült két olyan egyszerű törtre felbontani, melyek könnyen visszatranszformálhatók idő tartományba a táblázat felhasználásával:

$$\underline{\frac{10}{s(\tau s+1)}}=\frac{10}{s}-\frac{0{,}1}{\tau s+1}$$

Az eredeti feladatra visszatérve

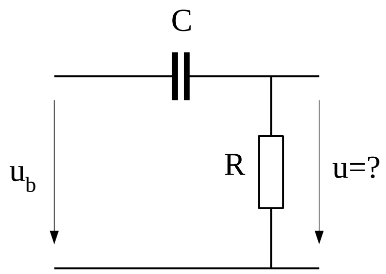
$$U(s)=\underline{\frac{10}{s(\tau s+1)}}+\underline{\underline{\frac{\tau\cdot u_0}{\tau s+1}}}=\frac{10}{s}-\frac{0{,}1}{\tau s+1}+\frac{\tau\cdot u_0}{\tau s+1}=\frac{10}{s}-7\frac{1}{s+100}$$

Visszatranszformálva idő tartományba:

$$u(t)=\underline{\underline{10-7e^{-\frac{t}{0{,}01}}}}$$

Példa

Határozzuk meg az alábbi RC tag u(t) kimenetét, ha a bemenet $u_b=10\cdot 1(t)$ ugrásfüggvény! Legyen a kezdeti feltétel u(0⁻)=3V és RC=0,01 s!



A csomóponti törvénnyel

$$C\frac{d(u_b-u)}{dt}-\frac{u}{R}=0$$

Rendezés után

$$\tau\frac{du}{dt}+u=\tau\frac{du_b}{dt}$$

Laplace-transzformálva

$$\tau[sU(s)-u_0]+U(s)=\tau[sU_b(s)-u_{b0}]$$

Az adatok helyettesítésével

$$0{,}01[sU(s)-3]+U(s)=0{,}01[s\frac{10}{s}-0]$$

Rendezés után

$$U(s)=13\frac{1}{s+100}\quad\rightarrow\quad u(t)=\underline{\underline{13e^{-100t}}}$$

Az eredmény kiszámításához nem volt szükség semmiféle furfangos meggondolásra (nem úgy, mint az idő tartománybeli megoldásnál)

A Laplace-transzformáció hajtástechnikai alkalmazása.

DC motor egyenlete operátor tartományban, <u>zérus kezdeti feltételek esetén</u> (levezetés a jegyzetben)

$$\Omega(s)=\frac{A}{Ts+1}U(s)-\frac{B}{Ts+1}M_t(s)$$

A motor állandósult egyenlete (előző félév anyaga) a végérték-tétellel kapható: a motor szögsebessége jóval a bekapcsolás után, a tranziensek lecsengése után)

$$\omega(\infty)=\lim_{s\to 0}s\Omega(s)=\lim_{s\to 0}s(\frac{A}{Ts+1}\cdot\frac{\hat{u}}{s}-\frac{B}{Ts+1}\cdot\frac{\hat{M}_t}{s})=A\hat{u}-B\hat{M}_t$$

(Figyeljük meg, hogy a nevező gyökei s_1= -1/T és s_2=0 eleget tesznek a végérték-tétel feltételének).

A motor adatai:
Indítónyomaték M_0=3 Nm
Üresjárási szögsebesség ω_0=300 rad/s
Időállandó T=0,1 s
Motorkonstansok A=30 rad/sV; B=100 rad/sNm

a) motor bekapcsolása terhelés nélkül

Terhelő nyomaték nincs, ezért a második tag zérus:

$$\Omega(s)=\frac{A}{Ts+1}U(s)=\frac{A}{Ts+1}\cdot\frac{\hat{u}}{s}=\frac{\omega_0}{(Ts+1)s}$$

Időtartományba visszatranszformálva

$$\omega(t)=\omega_0(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

A motor kb. 5T idő alatt eléri üresjárási szögsebességét.

b) Motor indítása, ha a motor tengelyén J tehetetlenségi nyomatékú tárcsa van

A tárcsa gyorsításához $M = J\frac{d\omega}{dt}$ nyomaték szükséges, ez jelenti a motor terhelő nyomatékát.

$$\Omega(s) = \frac{A}{Ts+1}U(s) - \frac{B}{Ts+1}\underbrace{(Js\Omega(s))}_{M_t}$$

Rendezve

$$\Omega(s) = \frac{A}{\underbrace{(T+BJ)}_{T^*}s+1}U(s)$$

Megnövekedett a motor időállandója: T*=T+BJ
A motor lassabban ugyan, de eléri az üresjárási szögsebességét.

c) Generátoros fékezés

A motor ω_0 szögsebességgel forog, a kapcsait rövidre zárjuk. Keressük a szögsebesség időbeli változását.
A problémát az jelenti, hogy a DC motor egyenlete zérus kezdeti feltételekkel lett levezetve, most pedig a kezdeti feltétel nem zérus ($\omega(0)=\omega_0$). Terhelő nyomaték nincs, ezért a második tag zérus:

$$\Omega(s) = \frac{A}{Ts+1}U(s)$$

Ahhoz, hogy kezdeti feltétellel is tudjunk számolni, írjuk át az operátor tartományban adott egyenletet idő tartományba! Ekkor $s \equiv \frac{d}{dt}(\;)$.

$$\Omega(s)(Ts+1) = AU(s) \quad \rightarrow \quad T\frac{d\omega}{dt} + \omega = Au(t)$$

Mivel a motor kapcsait <u>rövidre zártuk</u>, a kapocsfeszültség zérus! Vigyázat: a kapcsok nem nyitottak, hanem egyértelműen rövidre zártak! Mivel u=0, a jobb oldal zérus.

$$T\frac{d\omega}{dt} + \omega = 0$$

Ezt az egyenletet vagy megoldjuk idő tartományban az adott kezdeti feltétellel, vagy Laplace-transzformáljuk a kezdeti feltétel figyelembe vételével:

$$T[s\Omega(s) - \omega_0] + \Omega(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \Omega(s) = \frac{T\omega_0}{Ts+1} \quad \rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

Láthatóan a generátoros fékezés csak nagyobb sebességnél hatásos, (energia visszatáplálás is csak ekkor lehetséges), kis sebességnél alig van fékhatás. Elektromos autóknál ezért a villamos fékezésen kívül gondoskodni kell mechanikus fékezéstől is.

d) fékezés ellenirányú kapocsfeszültséggel

A motor ω_0 szögsebességgel forog, a kapocsfeszültségének polaritását megváltoztatjuk. Keressük a szögsebesség időbeli változását.

$$\Omega(s)(Ts+1) = AU(s) \quad \rightarrow \quad T\frac{d\omega}{dt} + \omega = -A\hat{u}$$

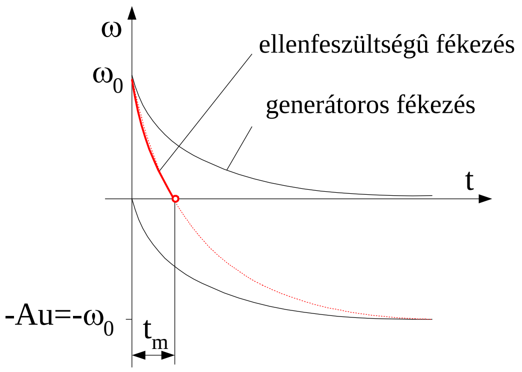
Laplace-transzformálva a kezdeti feltétel figyelembe vételével

$$T[s\Omega(s) - \omega_0] + \Omega(s) = -A\frac{\hat{u}}{s} \quad \rightarrow \quad \Omega(s) = \frac{T\omega_0}{Ts+1} - \frac{A\hat{u}}{(Ts+1)s}$$

Idő tartományba visszatranszformálva

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{T}} - A\hat{u}(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Az ábrán látható, hogy generátoros fékezéssel csak végtelen idő alatt lehetne lefékezni a motort, míg ellenfeszültségű fékezéssel rövid idő alatt lefékezhető a motor. Arra kell ügyelni, hogy t_m időpillanatban a feszültséget meg kell szüntetni, nehogy ellenkező irányba tovább forogjon a motor!



e) fékezés nyomatékkal

A motor ω_0 szögsebességgel forog, amikor M_t=2 Nm fékező nyomatékot kezdünk működtetni.

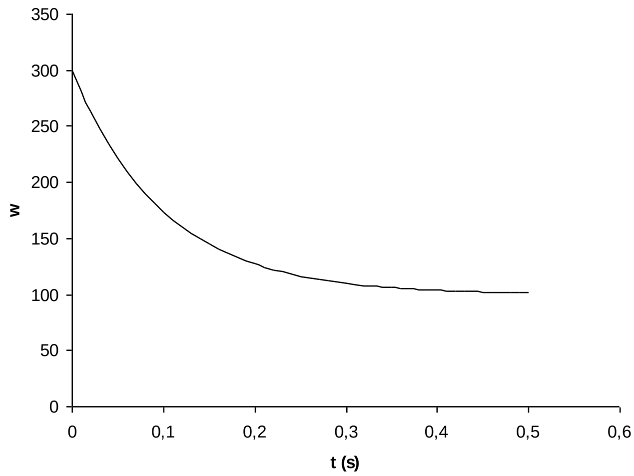
$$\Omega(s)(Ts+1) = AU(s) - BM_t(s) \quad \rightarrow \quad T\frac{d\omega}{dt} + \omega = A\hat{u} - B\hat{M}_t$$

Laplace-transzformálva a kezdeti feltétel figyelembe vételével

$$T[s\Omega(s) - \omega_0] + \Omega(s) = A\frac{\hat{u}}{s} - B\frac{\hat{M}_t}{s} \quad \rightarrow \quad \Omega(s) = \frac{T\omega_0}{Ts+1} + \frac{A\hat{u} - B\hat{M}_t}{(Ts+1)s}$$

Idő tartományba visszatranszformálva: $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{T}} + (A\hat{u} - B\hat{M}_t)(1 - e^{-\frac{t}{T}})$, összevonva

$$\omega(t) = \omega_0 - B\hat{M}_t(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



A motor szögsebessége lecsökken, min

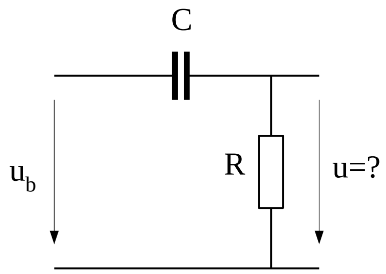
Átviteli függvény

Sok esetben a rendszer kezdeti feltételei zérusok, ekkor a deriváltak Laplace-transzformálásánál a kezdeti értéket tartalmazó tagok mind zérusok. Megkülönböztetésül ezt a transzformációt jelöljük $\mathcal{L}_0$-lal. Az átviteli függvény a rendszer kimenetének $\mathcal{L}_0$ transzformáltja, osztva a bemenet $\mathcal{L}_0$ transzformáltjával:

$$Y(s) = \frac{\mathcal{L}_0(x)}{\mathcal{L}_0(x_b)} = \frac{X(s)}{X_b(s)} \quad \text{(zérus kezdeti feltételek esetén)}$$

Példa

Határozzuk meg az előző példában szereplő áramkör átviteli függvényét (τ=RC=0,01 s)!



Az alábbi

$$\tau\frac{du}{dt} + u = \tau\frac{du_b}{dt}$$

rendszeregyenletet most $\mathcal{L}_0$ transzformáljuk:

$$\tau sU(s) + U(s) = \tau sU_b(s)$$

Az átviteli függvény

$$Y(s)=\frac{U(s)}{U_b(s)}=\underline{\underline{\frac{\tau s}{\tau s+1}}}$$

Az átviteli függvény <u>a rendszer struktúrájának jellemzője</u>, nem függ sem a gerjesztéstől, sem a kezdeti feltételektől. Ha csak a gerjesztés változik, akkor csak a gerjesztést kell változtatni a kimenet számításánál:

$$U(s)=Y(s)U_b(s)$$

Nézzük néhány gyakori bemenőjelre a rendszer válaszát!

a) $u_b(t)=10\cdot 1(t)$ ugrásfüggvény gerjesztés

A kimenőjel

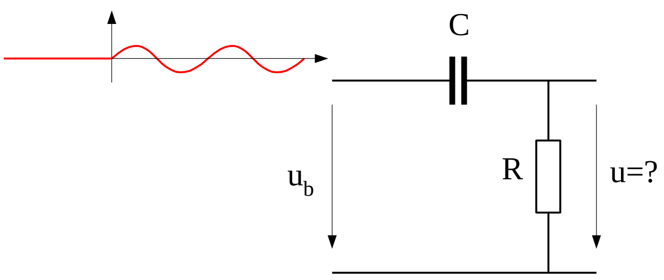
$$U(s)=\underbrace{\frac{\tau s}{\tau s+1}}_{Y(s)}\cdot\underbrace{\frac{10}{s}}_{U_b(s)}=10\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\quad\rightarrow\quad u(t)=10e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b) $u_b(t)=10\cdot t\cdot 1(t)$ ramp gerjesztés

A kimenőjel

$$U(s)=\frac{\tau s}{\tau s+1}\cdot\frac{10}{s^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{\tau s+1}=\frac{10\tau}{s}-10\tau\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\quad\rightarrow\quad u(t)=10\tau-10\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

c) $u_b(t)=10\sin 30t$, origóban belépő szinuszos gerjesztés (ω=30 rad/s)



a kimenőjel

$$U(s)=\frac{\tau s}{\tau s+1}\cdot\frac{10\omega}{s^2+\omega^2}$$

A parciális törtekre bontásnál vegyük figyelembe, hogy a kimenőjelben szerepelnie kell fázisában eltolt szinuszjelnek is, amit szinuszos és koszinuszos jelek összegeként tételezünk fel:

$$U(s)=\frac{\tau s}{\tau s+1}\cdot\frac{10\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{A}{\tau s+1}+\frac{B\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{Ds}{s^2+\omega^2}=\frac{A(s^2+\omega^2)+(B\omega+Ds)(\tau s+1)}{(\tau s+1)(s^2+\omega^2)}$$

A számlálók összehasonlításából

$s^0:\quad 0=A\omega^2+B\omega$

$s^1:\quad 10\tau\omega=B\omega\tau+D$

$s^2:\quad 0=A+D\tau$

Az ismeretleneket kiszámítva

$$A=-\frac{10\tau^2\omega}{\tau^2\omega^2+1};\quad B=\frac{10\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2+1};\quad D=\frac{10\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}$$

A kimenőjel az operátor tartományban

$$U(s)=-\frac{10\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}+\underbrace{\frac{10\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2+1}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{10\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

Az utolsó két tag a fázisában eltolt szinusz Laplace-transzformáltja, aminek K amplitúdóját és φ fázisszögét kiszámíthatjuk:

$$L^{-1}\left(\frac{10\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2+1}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{10\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{10\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2+1}\sin\omega t+\frac{10\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}\cos\omega t=$$

$$=\underbrace{10\frac{\tau\omega}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}}_{K}\sin(\omega t+\underbrace{\mathrm{arctg}\frac{1}{\tau\omega}}_{\varphi})$$

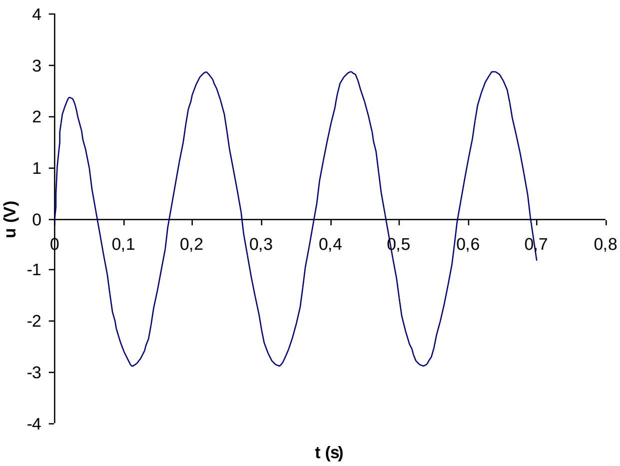
Itt $K=\sqrt{\left(\frac{10\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2+1}\right)^2+\left(\frac{10\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}\right)^2}=\frac{10\tau\omega}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}$ és $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{\frac{10\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}}{\frac{10\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2+1}}=\mathrm{arctg}\frac{1}{\tau\omega}$

Az általános megoldás

$$u(t)=-10\frac{\tau\omega}{\tau^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{\tau}}+10\frac{\tau\omega}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\sin(\omega t+\mathrm{arctg}\frac{1}{\tau\omega})$$

A számadatok behelyettesítésével

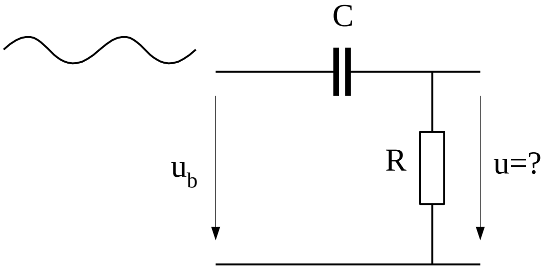
$$u(t)=\underline{\underline{-2{,}75e^{-\frac{t}{0{,}01}}+2{,}87\sin(30t+1{,}279)}}$$



A <u>teljes (általános) megoldást</u> megkaptuk zérus kezdeti feltételek esetén, de bonyolult számítással! (Később látni fogjuk, hogy a Frekvencia módszerrel sokkal egyszerűbben megkaphatjuk az állandósult megoldást)

Frekvencia-átviteli függvény, Frekvencia módszer (s=jω)

Ha a bemenőjel szinuszos, és csak az állandósult megoldás a kérdés, akkor sokkal egyszerűbb úton is célt érhetünk a frekvencia módszer alkalmazásával.
Vizsgáljuk az előző példát, de csak az állandósult megoldást keressük. (A gerjesztés régebb óta tart, a tranziens már lecsengett):



A rendszer átviteli függvénye

$$Y(s) = \frac{U(s)}{U_b(s)} = \frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

Írjunk s helyébe jω-t (Emlékezzünk: Laplace-transzformációnál a deriválás s-sel való szorzás, szinusz függvény komplex alakjánál a deriválás jω-val való szorzást jelentett). Így jutunk a frekvencia-átviteli függvényhez, aminek számlálóját és nevezőjét exponenciális alakban írjuk fel:

$$Y(j\omega) = \frac{\tau \cdot j\omega}{\tau \cdot j\omega + 1} = \frac{\tau\omega e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1^2 + (\tau\omega)^2}\, e^{j\mathrm{arctg}\frac{\tau\omega}{1}}} = \underbrace{\frac{\tau\omega}{\sqrt{1^2 + (\tau\omega)^2}}}_{A(\omega)} e^{\overbrace{j(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\tau\omega)}^{\varphi(\omega)}}$$

Az amplitúdó nagyítás a frekvencia-átviteli függvény abszolút értéke:

$$A(\omega) = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_b} = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1^2 + (\tau\omega)^2}} = \frac{0{,}3}{\sqrt{1 + 0{,}3^2}} = 0{,}287$$

A kimenő jel amplitúdója ezzel

$$\hat{u} = A(\omega) \cdot \hat{u}_b = 0{,}287 \cdot 10 = 2{,}87 \quad \mathrm{V}$$

A fázistolás pedig a számláló és a nevező fázisszögének különbsége

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\tau\omega = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}0{,}3 = 1{,}279 \quad \mathrm{rad}$$

A kimenőjel ezzel

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi) = \underline{\underline{2{,}87\sin(30t + 1{,}279)}}$$

Sokkal egyszerűbb úton megkaptuk a végeredményt, de ez csak az állandósult megoldás!

A frekvencia-átviteli függvény ábrázolása: BODE diagram

(szinuszos gerjesztés esetén, állandósult állapotban ábrázoljuk az amplitúdó-nagyítást és fázistolást a gerjesztés körfrekvenciájának függvényében)

(honlapon található melléklet)

Példa

DC motor első- és másodrendű modelljének BODE-diagramja

A motoron nincs terhelés, ekkor elsőrendű rendszermodellje (induktivitás elhanyagolásával)

$$Y_u(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{A}{T_m s + 1}$$

másodrendű rendszermodellje (induktivitás figyelembe vételével)

$$Y_u^*(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{A}{T_v T_m s^2 + T_m s + 1}$$

ahol

T_m	mechanikus időállandó (forgórész tehetetlensége miatt)
$T_v=L/R$	villamos időállandó (áram felfutása a tekercsben)

Adatok:
A=30 rad/sV
T_m=0,05 s
T_v=0,002 s

Első rendű modell esetén

$$Y(j\omega) = \frac{30}{0{,}05 j\omega + 1} = 30 \frac{1}{j\frac{\omega}{20} + 1}$$

(törésponti körfrekvencia 20 rad/s, kisfrekvenciás erősítés $A^{dB} = 20 \lg 30 = 29{,}5 \text{ dB}$)

Másodrendű rendszermodell esetén
Meg kell vizsgálni, hogy a nevező másodrendű tag, vagy két elsőrendű tag szorzata-e?
A másodfokú egyenlet gyökei s_1= -20,9 és s_2= -479,1, mindkettő valós szám, ezért a nevező gyöktényezős alakban

$$Y^*(s) = \frac{30}{0{,}0001 s^2 + 0{,}05 s + 1} = \frac{30}{0{,}0001(s + 20{,}9)(s + 479{,}1)}$$

vagyis két elsőrendű tagról van szó! A frekvencia-átviteli függvény kanonikus alakban

$$Y^*(j\omega) = \frac{30}{(j\frac{\omega}{20{,}9} + 1)(j\frac{\omega}{479{,}1} + 1)}$$

A BODE diagramokon a másodrendű közelítést piros színnel ábrázoltuk. Kis frekvencián a két modell azonos eredményt ad, nagy frekvencián azonban jelentős eltérés lehetséges. Különösen PWM táplálás esetén alkalmazandó a másodrendű rendszermodell, mivel a PWM jel felharmonikus összetevőinek frekvenciái jóval a második töréspont felett lehetnek.

Szamárvezető feladatok megoldásához

x_h	x_p	$x_{ált}$	KF	1. rendű	2. rendű (x_h)	Megj.
*			* (**)	$x_h = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$	$D=0:\ K\sin(\alpha t+\varphi)$ $D<1:\ Ke^{-\beta t}\sin(\gamma t+\varphi)$ $D=1:\ A_1e^{-\alpha t}+A_2t\cdot e^{-\alpha t}$ $D\succ 1:\ A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$	**Idő tartomány** gerjesztetlen
*	*	*	*	$x_{ált}=x_h+x_p$ x_p: gerjesztéshez hasonló KF		**Idő tartomány** gerjesztett
	*			x_p: gerjesztéshez hasonló		**Idő tartomány** gerjesztett csak állandósult
		*	*	rsz. egyenlet L-transzformálása KF-tel X(s)=…parc. törtekre bontás x(t)=…visszatranszformálás		**OP tartomány** gerjesztetlen/gerjesztett
		*	0	Y(s)=…átviteli fv. $X(s)=Y(s)X_b(s)$ X(s)=…parc. törtekre bontás x(t)=…visszatranszformálás		**OP tartomány**
	*			Y(s)=…átviteli fv. Y(jω)=…fr. átviteli fv. A(ω)=…amplitúdó nagyítás φ(ω)=…fázistolás $x(t)=A(\omega)\hat{x}_b\cdot\sin(\omega t+\varphi)$		**OP tartomány** **Frekvencia-módszer** Bemenet szinuszos, kimenet állandósult (fázisában eltolt szinusz fv.)