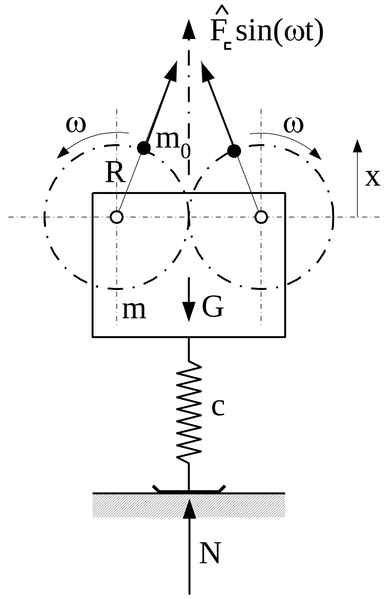
Vegyes feladatok

PÉLDA

Döngölőgép (erőgerjesztés)

Egy döngölő gerjesztő része két egyforma, ω=22,5 1/s szögsebességgel szembeforgó fogaskeréken R=0,08m sugáron elhelyezett m_0=0,5 kg tömegből áll. A gép teljes tömege m=15 kg, ami c=10.000 N/m merevségű rugóval csatlakozik az elhanyagolható tömegű talphoz. A rendszer csillapítását elhanyagolhatjuk.



Határozzuk meg a döngölő által a talajra kifejtett N erő nagyságát állandósult esetben!

Megoldás

Mivel a csillapítás elhanyagolható, ezért erőgerjesztésű harmonikus rezgéssel állunk szemben (középiskola és MA1!). Ami újdonság, hogy az

$$F_g(t) = -G + \underbrace{2 \cdot m_0 R\omega^2}_{\hat{F}_c} \cdot \sin \omega t$$

<u>gerjesztő erő két komponensből áll</u>: az egyik a G statikus önsúly, a másik a centrifugális erők függőleges komponenseinek összege. A tömeg mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} + cx = F_g(t)$$

A rendszer átviteli függvénye

$$Y(s) = \frac{X(s)}{F_g(s)} = \frac{1}{ms^2 + c}$$

Mivel mindkét gerjesztőerő komponens szinuszos (ugyanis a konstans G súlyerő is felfogható, mint zérus körfrekvenciájú szinusz függvény), valamint csak az állandósult megoldást keressük, így a frekvencia módszert alkalmazzuk mindkét gerjesztő erő komponensre. Lineáris rendszernél a bemenetek függetlenül fejtik ki hatásukat, ezért a szuperpozíciót alkalmazhatjuk. A két gerjesztő erő-komponensre külön-külön meghatározzuk a kimeneteket (x elmozdulásokat) majd végül összegezzük azokat. A rendszer frekvencia átviteli függvénye:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + c} = \frac{1}{c - m\omega^2} \quad \rightarrow \quad A(\omega) = \frac{1}{\left|c - m\omega^2\right|}$$

A frekvencia-átviteli függvény most kivételesen valós szám, ezért a fázistolás vagy nulla vagy 180 fok, mivel nincs csillapítás a rendszerben. Y(jω) előjele egyértelműen jelzi, hogy azonos, vagy ellenfázisban leng-e a tömeg a gerjesztéshez viszonyítva.

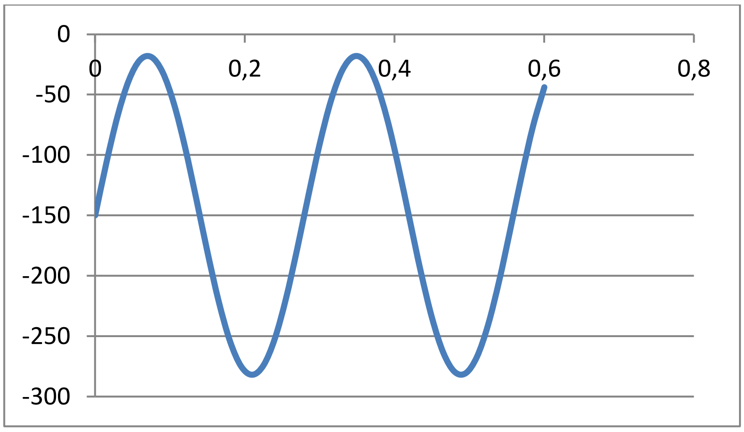
A számítást táblázatosan végezzük.

ω	$F_g(\omega)$	$A(\omega)$	$\hat{x}(\omega) = A(\omega) \cdot F_g(\omega)$	$N(\omega) = c \cdot \hat{x}(\omega)$
0	-G=-150 N	$\frac{1}{10000 - 15 \cdot 0^2} = 0{,}0001$	-0,015 m	-150 N
22,5	$\hat{F}_c = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}08 \cdot 22{,}5^2 = 32\ \text{N}$	$\frac{1}{10000 - 15 \cdot 22{,}5^2} = 0{,}000415$	0,0132 m	132 N

A földet terhelő erő

$$F(t) = -150 + 132\sin(22{,}5t)\ \text{N},$$

aminek maximuma 282 N, minimuma 18 N. A gép helyesen lett méretezve, mivel a talp végig lefele mutató nyomóerőt fejt ki a talajra, nem válik el tőle, nem ugrál. Ugyanakkor az erő minimális értékekor könnyen lehet a talajon odébb tolni. A gépkezelő kezét a mozgó gépház két amplitúdónyi, 2·0,0132=0,0264 m függőleges irányú mozgásra készteti (munkavédelem!).

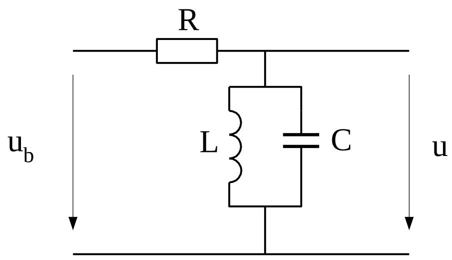


Figyeljük meg, hogy ebben az esetben a rendszert úgy hangoltuk, hogy a gerjesztés ω=22,5 1/s körfrekvenciája közel essen a rendszer α=25,8 1/s sajátfrekvenciájához. A rezonancia-közeli állapot azt eredményezte, hogy a 32 N gerjesztő centrifugális erőből 132 N döngölő erő alakult ki (több, mint négyszeres amplitúdó nagyítás). Ebben az esetben a rezonancia-közeli állapot hasznosnak bizonyult!

PÉLDA

Szinuszjel előállítása négyszögjelből. Sávszűrő.

Adott 50% kitöltési tényezőjű 200 Hz frekvenciájú négyszögjel sorozatból f_0=200 Hz frekvenciájú harmonikus (szinusz vagy koszinusz) jelet akarunk előállítani. Ennek megfelelően RLC sávszűrőt alkalmazunk, mely jó közelítéssel kiszűri a négyszögjel Fourier-sorának konstans tagját, valamint a felharmonikusokat, csupán a 200 Hz frekvenciájú alapharmonikus tagot engedi át.



Megoldás

a) Sávszűrő tervezése

Az ábrán bemutatott sávszűrő átviteli függvénye (levezetést az olvasóra bízva, pl. komplex impedanciákkal)

$$Y(s)=\frac{U(s)}{U_b(s)}=\frac{Ls}{RLCs^2+Ls+R}$$

frekvencia-átviteli függvényét Bode-diagram szerkesztéshez megfelelő kanonikus alakra hozva

$$Y(j\omega)=\frac{(L/R)j\omega}{\left(j\frac{\omega}{1/\sqrt{LC}}\right)^2+\underbrace{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}_{2D}\left(j\frac{\omega}{1/\sqrt{LC}}\right)+1}$$

Az elemértékek meghatározásához egy paramétert szabadon vehetünk fel: az induktivitásra vegyünk fel L=0,1 H értéket. A törésponti frekvencia képletéből a kapacitás értéke

$$\omega_t=\frac{1}{\sqrt{LC}}=2\pi f_0 \quad\rightarrow\quad C=\frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}=\frac{1}{4\pi^2 200^2\cdot 0{,}1}=\underline{\underline{6{,}33\ \mu F}}$$

Az erősítés a törésponti frekvencián egységnyi az elemértékektől függetlenül

$$A(\omega_t)=\frac{\frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}=1$$

Az M_p túllövés legyen 20 dB a törésponti frekvencián az élesebb rezonancia érdekében

$$M_p = (2D)^{-1} = \left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^{-1} = 10 \quad \rightarrow \quad R = \frac{10}{\sqrt{\frac{C}{L}}} = \frac{10}{\sqrt{\frac{0,00000633}{0,1}}} = \underline{\underline{1256 \ \ \Omega}}$$

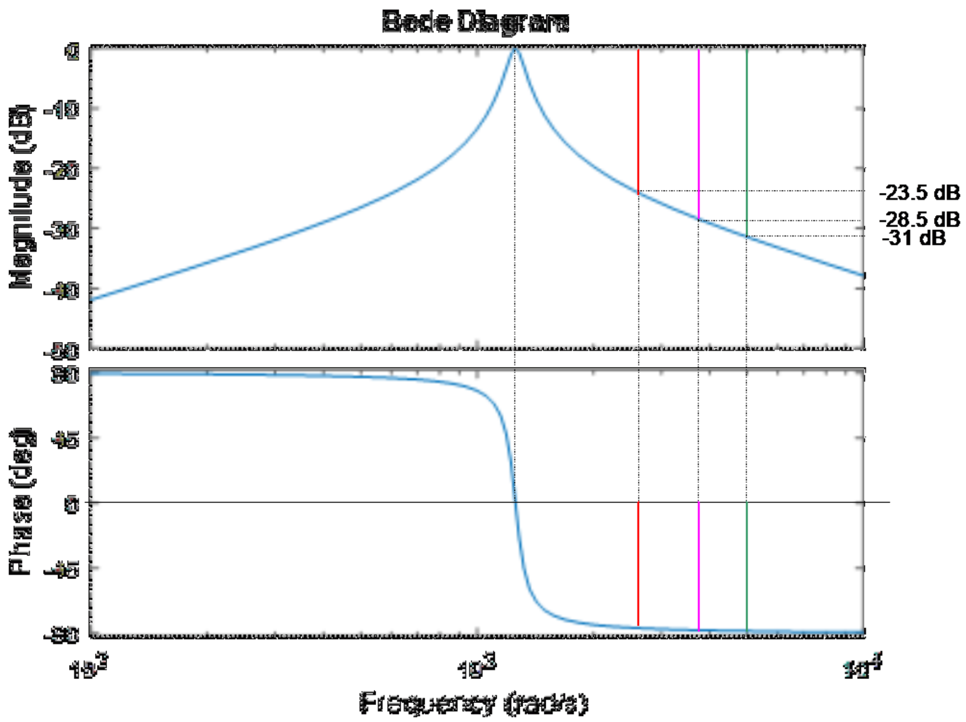
A szűrő átviteli függvénye a paraméterek értékének behelyettesítésével:

$$Y(s) = \frac{125,6s}{s^2 + 125,6s + 1256^2}$$

Ellenőrzésül megrajzoljuk a sávszűrő Bode-diagramját.

Matlab kód:

```
num=[125.6  0];
den=[1  125.6  1577536];
bode(num,den)
```



b) A kimenőjel meghatározása

A k=0,5 kitöltési tényezőjű négyszögjel Fourier-sora ($a_0 = k;\ a_n = \frac{2}{n\pi}\sin(nk\pi)$)

$$u_b(t) = 0,5 + 0,6369\cos(1256t) - 0,2123\cos(3768t) + ...$$

A szűrő frekvencia-átviteli függvénye

$$Y(j\omega)=\frac{125{,}6j\omega}{(1577536-\omega^2)+125{,}6\omega j}$$

Amplitúdó nagyítása és fázistolása

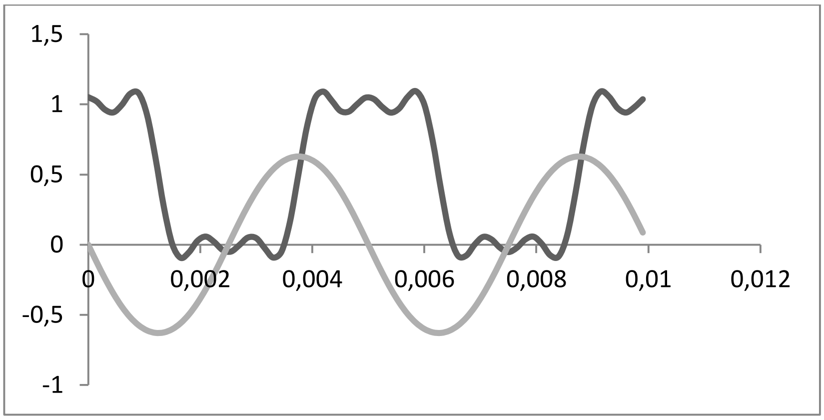
$$A(\omega)=\frac{125{,}6\omega}{\sqrt{(1577536-\omega^2)^2+(125{,}6\omega)^2}}\qquad \varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{125{,}6\omega}{1577536-\omega^2}$$

A számítást táblázatosan végezzük a szuperpozíció elve szerint:

n	ω	u_{be}	$A(\omega)$	$u=A(\omega)u_{be}$	φ
0	0	0,5	0	0	0
1	1256	0,6369	1 (0 dB)	0,6369	1,57
2	2512	0	(0,06651) (-23,5 dB)	-	-
3	3768	-0,2123	0,03747 (-28,8 dB)	-0,00795	-1,533
4	5024	0	(0,02665) (-31 dB)	-	-

A kimenet, mint az ábrán látható, nagyon jó közelítéssel harmonikus függvény:

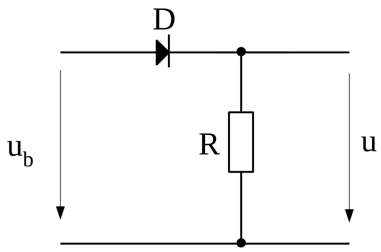
$$u(t)=0{,}6369\cos(1256t+1{,}57)-0{,}00795\cos(3768t-1{,}533)+\ldots..$$



PÉLDA

Numerikus módszerek: Iteráció

Határozzuk meg az ábrán látható áramkör kimenő feszültségét, ha az ellenállás R=1 kΩ, a bemenő feszültség u_b=5 V, a dióda egyenlete $i_d=10^{-13}e^{\frac{u_d}{0{,}026}}$



Megoldás
A csomóponti törvényt felírva

$$10^{-13} e^{\frac{u_b - u}{0{,}026}} = \frac{u}{R}$$

Ez a transzcendens egyenlet numerikusan oldható meg. Logaritmálva az egyenletet

$$\frac{u_b - u}{0{,}026} = \ln(10^{13} \frac{u}{R}) \quad \to \quad u = 5 - 0{,}026 \ln(10^{10} u)$$

Az u=f(u) alakra hozott egyenlet megoldható iterációval, ha az iteráció konvergens.
Válasszuk kezdő értéknek u=4 V-ot. Az egyenlet jobb oldalát többször kiszámítva a baloldali érték helyettesítésével

u=4;   4,365;   4,363;   4,363

Jelen példában az iteráció gyorsan konvergált az u=4,363 V értékhez. Megjegyzendő, hogy a feladatot munkaponti linearizációval a MA1 tantárgyban már sikerült megoldani.

PÉLDA
Érintő módszer

Egy folyamat átviteli függvénye

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 + 52s^2 + 200s + 5000}$$

Határozzuk meg a folyamat Bode-diagramjának törésponti frekvenciáit!

Megoldás
A feladat tulajdonképpen az

$$s^3 + 52s^2 + 200s + 5000 = 0$$

egyenlet gyöktényezős alakba való átírása. Az egyenlet egyik gyökét numerikusan, érintő módszerrel keressük meg. A függvény, melynek zérushelyeit keressük és annak deriváltja

$$f(s) = s^3 + 52s^2 + 200s + 5000$$

$$f'(s) = 3s^2 + 104s + 200$$

Legyen a kezdő érték s_0= -60

$$f(-60) = (-60)^3 + 52(-60)^2 + 200(-60) + 5000 = -35800$$

$$f'(-60) = 3 \cdot (-60)^2 + 104 \cdot (-60) + 200 = 4760$$

$$s_1 = s_0 - \frac{f(s_0)}{f'(s_0)} = (-60) - \frac{(-35800)}{4760} = -52{,}47$$

Megismételve az eljárást, a gyök egy jobb közelítése

$$f(-52{,}47)=(-52{,}47)^3+52(-52{,}47)^2+200(-52{,}47)+5000=-6787{,}95$$

$$f'(-52{,}47)=3\cdot(-52{,}47)^2+104\cdot(-52{,}47)+200=3002{,}42$$

$$s_2=s_1-\frac{f(s_1)}{f'(s_1)}=(-52{,}47)-\frac{(-6787{,}95)}{3002{,}42}=-50{,}2$$

Megismételve az eljárást, a gyök egy még jobb közelítése

$$f(-50{,}2)=(-50{,}2)^3+52(-50{,}2)^2+200(-50{,}2)+5000=-503{,}92$$

$$f'(-50{,}2)=3\cdot(-50{,}2)^2+104\cdot(-50{,}2)+200=2539{,}32$$

$$s_3=s_2-\frac{f(s_2)}{f'(s_2)}=(-50{,}2)-\frac{(-503{,}92)}{2539{,}32}=-50{,}00$$

Tovább nem folytatva az eljárást, elfogadjuk, hogy az egyenlet egyik gyöke s_I= - 50.

A további gyökök meghatározásához írjuk fel az egyenletet gyöktényezős alakban

$$(s+50)(s^2+bs+c)=s^3+\underbrace{(50+b)}_{52}s^2+\underbrace{(50b+c)}_{200}s+\underbrace{50c}_{5000}$$

Az eredeti egyenlet együtthatóival összehasonlítva b=2; c=100 adódik.

Az $s^2+2s+100=0$ másodfokú egyenletet komplex gyökökre vezet, vagyis a Bode-diagramon ez egy másodrendű tagnak felel meg (nem bontható elsőrendű tagok szorzatára).
A frekvencia-átviteli függvény kanonikus alakra alakítva

$$Y(j\omega)=\frac{1}{50(j\frac{\omega}{50}+1)\cdot 100[(j\frac{\omega}{10})^2+0{,}2(j\frac{\omega}{10})+1]}$$

A törésponti frekvenciák leolvashatók: ω_{t1}=10 rad/s (másodrendű tag) és ω_{t2}=50 rad/s (elsőrendű tag)

PÉLDA
Érintő módszer, fogaskerékszámítás.

Fogaskerék hajtások méretezésénél előfordul, hogy a fogevolvens alatti középponti szög értékéből (involut alfa) kell meghatározni az alfa szöget. A szögek közötti kapcsolat: $\mathrm{inv}(\alpha)=\mathrm{tg}\alpha-\alpha$
Legyen adva inv(α)=0,2 és keressük α-t!

Megoldás
Nullára rendezve az egyenletet, az f(α)=0 egyenlet gyökét (zérushelyét) keressük.

$$f(\alpha)=\mathrm{tg}\alpha-\alpha-0{,}2$$

$$f'(\alpha)=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$

Legyen a kezdő érték $\alpha_0=1$ rad.

$$f(\alpha_0) = tg\alpha_0 - \alpha_0 - 0{,}2 = tg1 - 1 - 0{,}2 = 0{,}357$$

$$f'(\alpha_0) = \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} - 1 = \frac{1}{\cos^2 1} - 1 = 2{,}425$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)} = 1 - \frac{0{,}357}{2{,}425} = 0{,}852$$

A függvény értéke (0,357) még jócskán eltér zérustól. Megismételve a számítást, a gyök egy jobb közelítése

$$f(\alpha_1) = tg\alpha_1 - \alpha_1 - 0{,}2 = tg0{,}852 - 0{,}852 - 0{,}2 = 0{,}090$$

$$f'(\alpha_1) = \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} - 1 = \frac{1}{\cos^2 0{,}852} - 1 = 1{,}306$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = 0{,}852 - \frac{0{,}090}{1{,}306} = 0{,}783$$

Megismételve,

$$f(\alpha_2) = tg\alpha_2 - \alpha_2 - 0{,}2 = tg0{,}783 - 0{,}783 - 0{,}2 = 0{,}012$$

$$f'(\alpha_2) = \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} - 1 = \frac{1}{\cos^2 0{,}783} - 1 = 0{,}990$$

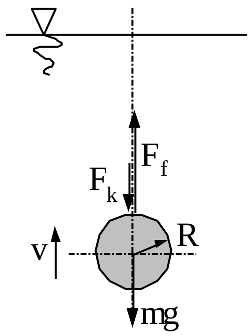
$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} = 0{,}783 - \frac{0{,}012}{0{,}990} = 0{,}770$$

Az egymásután kapott gyökök már alig térnek el egymástól, a keresett szög 0,770 rad. Számítógépes program esetén megadhatunk egy ε hibakorlátot két egymás utáni gyök $\delta = abs(\alpha_i - \alpha_{i-1})$ eltérésére. Amikor a δ eltérés kisebb az ε hibakorlátnál, a számítást abbahagyjuk.

PÉLDA

Golyó sebessége vízben. Numerikus megoldás

Egy R=0,01 m sugarú, ρ_f=850 kg/m^3 sűrűségű fa golyót lenyomunk a víz alá, majd szabadon engedjük. A közegellenállást sebesség négyzetével arányosnak vesszük c=0,3 alaktényezővel. Válasszuk az idő-lépésközt Δt=0,005 másodpercre.



a) Határozzuk meg a golyó sebességének időfüggvényét!
b) Mekkora a golyó állandósult sebessége?

Megoldás
ad a)

A golyó tömege $$m = \rho_f \frac{4R^3\pi}{3} = 850\frac{4\cdot 0{,}01^3\pi}{3} = 0{,}00355 \ \text{kg}$$

A golyóra ható erők:
súlyerő $$G = m\cdot g = 0{,}00355\cdot 10 = 0{,}0355 \ \text{N}$$

felhajtó erő (Archimedes-törvény) $$F_f = \rho_v g\frac{4R^3\pi}{3} = 1000\cdot 10\frac{4\cdot 0{,}01^3\pi}{3} = 0{,}0418 \ \text{N}$$

közegellenállási erő $$F_k = \frac{\rho_v R^2\pi c}{2}v^2 = \frac{1000\cdot 0{,}01^2\pi\cdot 0{,}3}{2}v^2 = 0{,}0471 v^2$$

A golyó mozgásegyenlete
$$F_f - G - F_k = m\frac{dv}{dt} \quad\rightarrow\quad 0{,}00355\frac{dv}{dt} + 0{,}0471 v^2 = 0{,}0418 - 0{,}0355 = 0{,}0063$$

A nemlineáris differenciálegyenletet átírjuk differencia-egyenletté:
$$0{,}00355\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} + 0{,}0471 v_i^2 = 0{,}0063$$

Rendezés után a rekurzív algoritmus:
$$v_{i+1} = 1{,}774\cdot\Delta t + v_i - 13{,}26\cdot\Delta t\cdot v_i^2$$

A Δt=0,005 sec idő-lépésközt helyettesítve a rekurzív algoritmus:
$$v_{i+1} = 0{,}00887 + v_i - 0{,}0663\cdot v_i^2$$

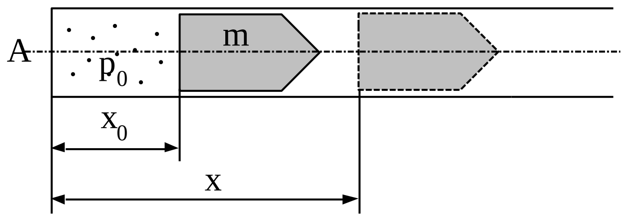
A számítást step-by-step folytatva

t=0,000	v=0
t=0,005 s	v=0,00887 m/s
t=0,010	v=0,01773
t=0,015	v=0,02657
t=0,020	v=0,03539
t=0,025	v=0,04417
t=0,030	v=0,05291

ad b)
Az állandósult sebesség elérésekor a sebesség már nem változik, vagyis a differenciálegyenletben dv/dt=0 lesz. Ekkor $v_{áll} = \sqrt{\frac{0{,}0063}{0{,}0471}} = 0{,}365 \ \text{m/s}$.

PÉLDA
Légpuska lövedék sebessége

Egy légpuska A=0,0001 m^2 keresztmetszetű csövébe m=0,01 kg tömegű golyót teszünk úgy, hogy a $p_0=10^6$ Pa nyomású sűrített levegővel kitöltött csőhossz x_0=0,04 m hosszú. Határozzuk meg a golyó sebességét a kilövés során. A közegellenállás elhanyagolható. Legyen az idő lépésköz Δt=0,0005 s.



Megoldás

A levegő nyomása tetszőleges x helyen (Egyszerűség kedvéért Boyle-Mariotte izotermikus gáztörvénnyel számolva az adiabatikus állapotváltozás helyett)

$$p_0 A x_0 = p(x) A x \quad \rightarrow \quad p(x) = p_0 \frac{x_0}{x}$$

A golyóra ható gázerő hiperbola függvény szerint csökken

$$F(x) = Ap(x) = \frac{A p_0 x_0}{x}$$

A golyó mozgásegyenlete a közegellenállás elhanyagolásával

$$F(x) = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \frac{A p_0 x_0}{x} = m\ddot{x}$$

A differenciálegyenletet átírjuk differencia-egyenletté:

$$\frac{A p_0 x_0}{x_i} = m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \quad \rightarrow \quad x_{i+1} = 2x_i + \frac{A p_0 x_0 \Delta t^2}{m x_i} - x_{i-1}$$

Az adatok helyettesítésével a rekurzív algoritmus

$$x_{i+1} = 2x_i + \frac{0{,}0001}{x_i} - x_{i-1}$$

Mivel a kezdősebesség zérus, ezért $x_{-1}=x_0=0{,}04$ m.

$$t = 0{,}0005 \qquad x_1 = 2x_0 + \frac{0{,}0001}{x_0} - x_{-1} = 2 \cdot 0{,}04 + \frac{0{,}0001}{0{,}04} - 0{,}04 = 0{,}0425$$

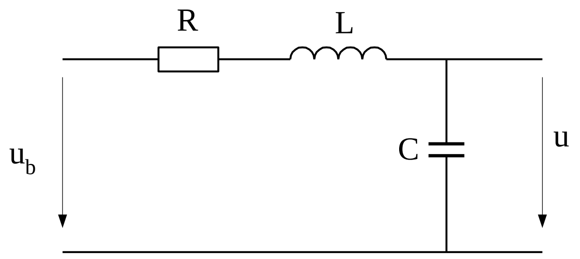
$$t = 0{,}0010 \qquad x_2 = 2x_1 + \frac{0{,}0001}{x_1} - x_0 = 2 \cdot 0{,}0425 + \frac{0{,}0001}{0{,}0425} - 0{,}04 = 0{,}04735$$

$$t = 0{,}0015 \qquad x_3 = 2x_2 + \frac{0{,}0001}{x_2} - x_1 = 2 \cdot 0{,}04735 + \frac{0{,}0001}{0{,}04735} - 0{,}0425 = 0{,}05431$$

PÉLDA

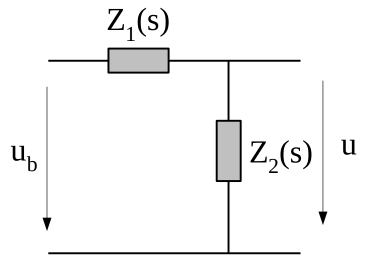
Aluláteresztő szűrő átviteli függvénye

A másodrendű aluláteresztő szűrő hatékonyabban szűri a magasabb frekvenciájú jeleket, mint az elsőrendű RC aluláteresztő szűrő, mivel a nagyfrekvenciás érintő meredeksége -40 dB/dekád. Határozzuk meg az ábrán látható másodrendű aluláteresztő szűrő átviteli függvényét!



Válasszuk meg az elemértékeket úgy, hogy a törésponti frekvencia ω_t=1000 1/s legyen, valamint a kisfrekvenciás erősítés 0 dB, a túllövés zérus legyen! Ellenőrzésül rajzoljuk meg a szűrő Bode-diagramját!

Megoldás
Az ilyen típusú kapcsolásra alkalmazhatjuk a komplex impedanciaosztó összefüggését a feszültségosztó mintájára:



$$Y(s)=\frac{U(s)}{U_b(s)}=\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{(R+cL)+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

A passzív szűrő kisfrekvenciás erősítésének 0 dB értéke automatikusan teljesül (s helyébe 0-t írva A(0)=1)

Egy elemérték szabadon választható. Válasszuk a tekercs induktivitását L=0,1 H értékre. Továbbá szinuszos jeleket feltételezve (s=jω) hozzuk a frekvencia-átviteli függvényt kanonikus alakra:

$$Y(j\omega)=\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{1/\sqrt{LC}}\right)^2+\underbrace{\frac{RC}{\sqrt{LC}}}_{2D}\left(j\frac{\omega}{1/\sqrt{LC}}\right)+1}$$

Innen láthatjuk, hogy a törésponti frekvencia $\omega_t=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, ahonnan a kapacitást kiszámíthatjuk:

$$C=\frac{1}{\omega_t^2 L}=\frac{1}{1000^2\cdot 0{,}1}=\underline{\underline{10^{-5}\ \text{F}}}$$

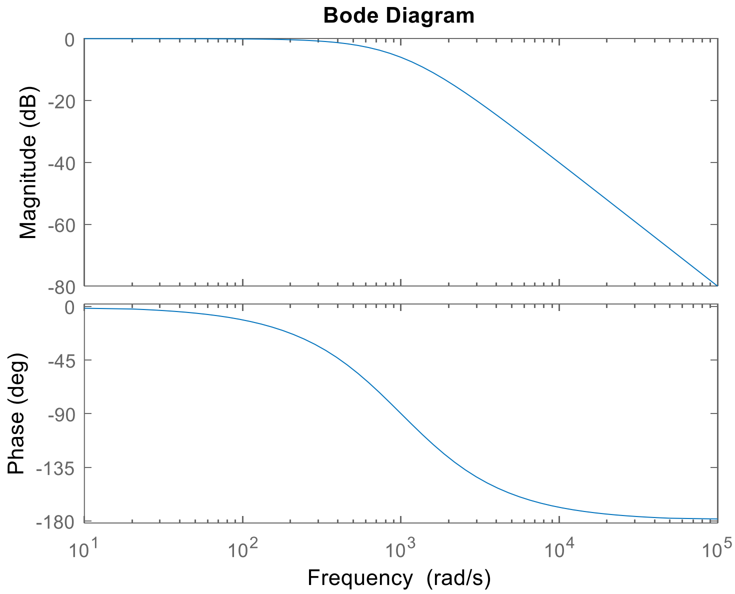
Az ellenállás értékét az előírt túllövésből határozhatjuk meg (D=0,7).

$$M_p=(2D)^{-1}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=0{,}7\ \rightarrow\ R=\frac{1}{0{,}7}\sqrt{\frac{L}{C}}=\underline{\underline{141\ \Omega}}$$

Az elemértékek helyettesítésével a szűrő átviteli függvénye

$$Y(s) = \frac{1}{10^{-6}s^2 + 1{,}41 \cdot 10^{-3}s + 1}$$

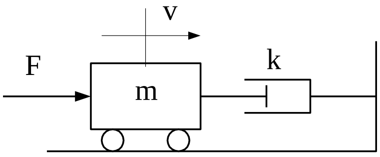
Ellenőrzésül Matlab programmal megrajzoltuk a szűrő Bode-diagramját.

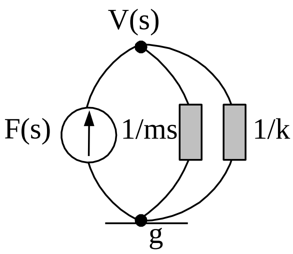


PÉLDA

Komplex impedancia

Határozzuk meg az ábrán látható rendszer Y(s)=V(s)/F(s) átviteli függvényét komplex impedanciák segítségével!





Megoldás

Megrajzoljuk a rendszer struktúra gráfját. Látható, hogy a tömeg és a csillapító párhuzamosan kapcsolódik egymással. Eredőjük

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{Z_m(s)} + \frac{1}{Z_k(s)} = \frac{1}{\frac{1}{ms}} + \frac{1}{\frac{1}{k}} = ms + k \quad \rightarrow \quad Z(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + k}$$

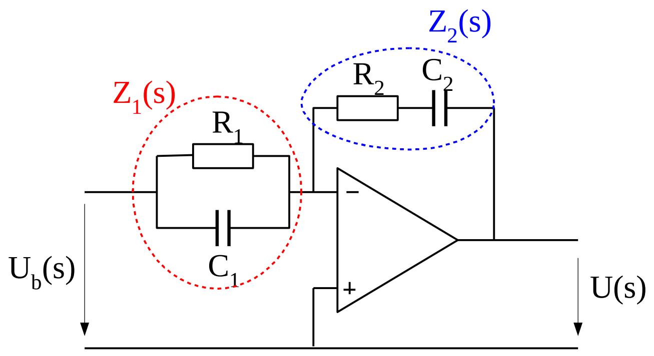
Az átviteli függvény éppen az eredő impedanciával egyezik meg:

$$Y(s) = \frac{1}{ms + k}$$

PÉLDA

Műveleti erősítős kapcsolás átviteli függvénye komplex impedanciákkal

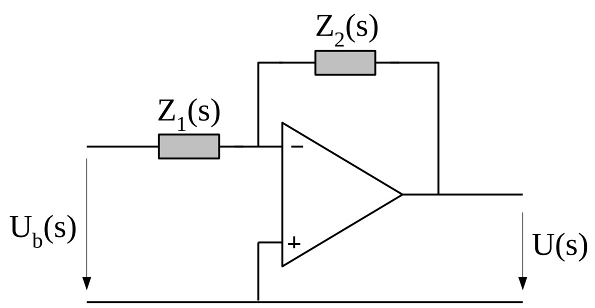
Határozzuk meg az ábrán látható kapcsolás Y(s)=U(s)/U_b(s) átviteli függvényét! Rajzolja meg a kapcsolás Bode diagramját jellegre helyesen!



Megoldás

Műveleti erősítő invertáló kapcsolása esetén $\frac{u}{u_b} = -\frac{R_2}{R_1}$. Hasonlóan, ha ohmikus ellenállások helyett impedanciák szerepelnek, a kapcsolás átviteli függvénye

$$Y(s) = \frac{U(s)}{U_b(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



A példában

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\frac{1}{sC_1}} = \frac{R_1C_1s+1}{R_1} \quad \rightarrow \quad Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s+1}$$

és

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2C_2s+1}{sC_2}$$

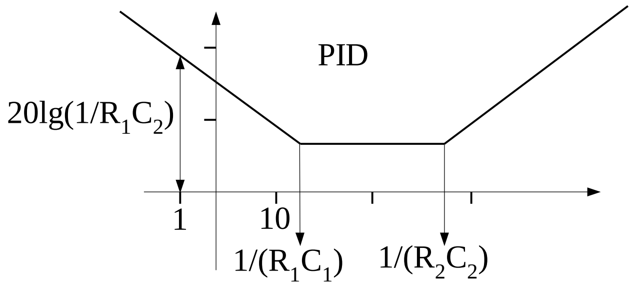
Az átviteli függvény

$$Y(s) = -\frac{\frac{R_2C_2s+1}{sC_2}}{\frac{R_1}{R_1C_1s+1}} = \underline{\underline{-\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_1C_2s}}}$$

A Bode diagram rajzolásához kanonikus alakra hozzuk a frekvencia-átviteli függvényt:

$$Y(j\omega) = -\frac{1}{R_1C_2}(j\omega)^{-1}\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{R_1C_1}}+1\right)^{+1}\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{R_2C_2}}+1\right)^{+1}$$

A törésponti frekvenciák az időállandók reciprokai. A bemutatott rendszer a szabályozástechnikában gyakran alkalmazott PID szabályozó.



PÉLDA

Tekercs impedanciája

Határozzuk meg a tekercsen átfolyó áram és a tekercs feszültségének kapcsolatát komplex impedancia segítségével!

Megoldás

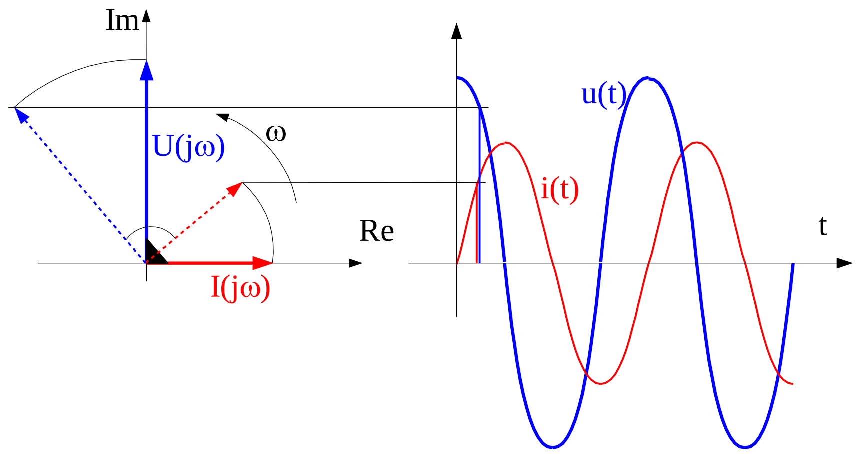
A tekercs komplex impedanciája

$$Z_L(s) = \frac{U_L(s)}{I_L(s)} = Ls$$

Szinuszos jelek esetén

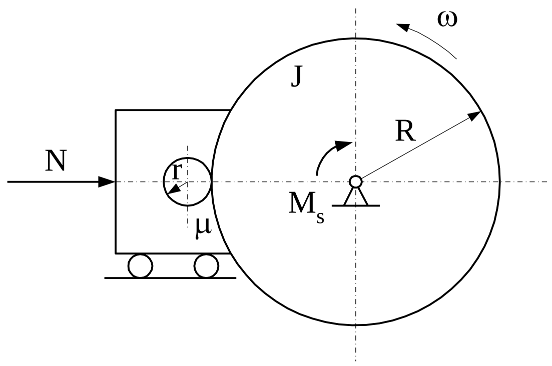
$$Z_L(j\omega) = \frac{U_L(j\omega)}{I_L(j\omega)} = Lj\omega \quad \rightarrow \quad U_L(j\omega) = Lj\omega \cdot I_L(j\omega)$$

Válasszuk valósnak az áramot (a vizsgált pillanatban az áram vektora a komplex számsík valós tengelyébe esik, függőleges vetülete, a pillanatnyi áram, zérus), ekkor a feszültség vektora a pozitív képzetes tengelybe esik. Vagyis a feszültség 90 fokkal siet az áramhoz képest!



PÉLDA
Dörzshajtás

A Győri Nemzeti Színház forgószínpadát hajtóműves DC motor forgatja elhanyagolható csúszású dörzshajtással. A motor indító nyomatéka M_0=500 Nm, üresjárási szögsebessége ω_0=30 rad/s , időállandója T=0,2 s, mindez 12V kapocsfeszültségnél. A motor tengelyére szerelt elhanyagolható tömegű dörzstárcsa sugara r=0,1 m. A dörzstárcsát (a motort) N erővel szorítjuk az m=3000 kg tömegű, R=8 m sugarú forgószínpad pereméhez. A súrlódási tényező a tárcsa és a perem között μ=0,3. A forgószínpad csapágyazásánál és vezetékeiben M_s=1600 Nm súrlódási nyomaték ébred mozgás közben.



a) Határozzuk meg a színpad ω_{sz} szögsebességének időfüggvényét bekapcsolás után!
b) Határozzuk meg a szükséges N összeszorító erőt!

Megoldás
ad a)
A hajtás áttétele

$$i = \frac{\omega_m}{\omega_{sz}} = \frac{R}{r} = \frac{8}{0{,}1} = 80$$

A színpad tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre

$$J = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} 3000 \cdot 8^2 = 96000 \ \text{kgm}^2$$

A motor tengelyére redukált tehetetlenségi nyomaték

$$J_{red} = \frac{J}{i^2} = \frac{96000}{80^2} = 15 \ \text{kgm}^2.$$

A motor tengelyére redukált súrlódási nyomaték

$$M_{red} = \frac{M_s}{i} = \frac{1600}{80} = 20 \ \text{Nm}$$

A motort terhelő nyomaték

$$M_t = M_{red} + J_{red} \frac{d\omega_m}{dt}$$, ami operátor tartományban $$M_t(s) = \frac{M_{red}}{s} + J_{red} s \Omega_m(s)$$

A motor egyenlete

$$\Omega_m(s) = \frac{A}{Ts+1} U(s) - \frac{B}{Ts+1} [\frac{\hat{M}_{red}}{s} + J_{red} s \Omega_m(s)],$$

ahol a motorállandók A=2,5 rad/sV és B=0,06 rad/sNm.

Rendezés után

$$\Omega_m(s)[Ts+1+BJ_{red}s]=\frac{A\hat{u}-B\hat{M}_{red}(s)}{s}$$

A motor szögsebessége

$$\Omega_m(s)=\frac{A\hat{u}-B\hat{M}_{red}(s)}{s[T^*s+1]},$$

ahol a megváltozott időállandó $T^*=T+BJ_{red}=0{,}2+0{,}06\cdot 15=1{,}1$ s.

Adatokkal

$$\Omega_m(s)=\frac{30-0{,}06\cdot 20}{s(1{,}1s+1)}=\frac{28{,}8}{s(1{,}1s+1)}$$

Parciális törtekre bontás után

$$\Omega_m(s)=28{,}8(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+0{,}909})$$

Idő tartományba visszatranszformálva a motor szögsebessége

$$\omega_m(t)=28{,}8(1-e^{-0{,}909t})$$

A forgószínpad szögsebessége

$$\omega_{sz}=\frac{\omega_m}{i}=\underline{\underline{0{,}36(1-e^{-0{,}909t})}}$$

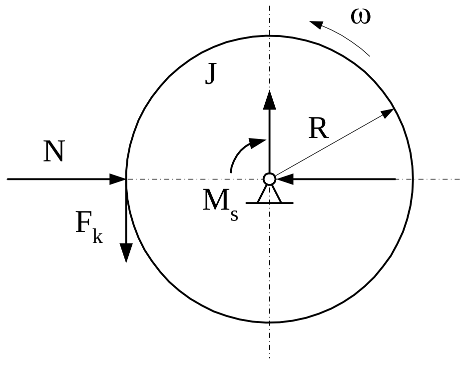
(közelítőleg 17,4 s alatt tesz meg egy teljes fordulatot)

ad b)

Az N összeszorító erő számításához először azt az F_k kerületi erőt számítjuk ki, amely az előbb kiszámított szögsebesség függvényt hozza létre.

A kerületi erő nyomatéka a súrlódás legyőzéséhez és a színpad gyorsításához szükséges:

$$M(t)=M_s+J\frac{d\omega_{sz}}{dt}=1600+96000\cdot 0{,}36\cdot 0{,}909\cdot e^{-0{,}909t}$$



A nyomatéknak az indítás pillanatában (t=0) van maximuma, mely M_{max}=M(0)=33015 Nm (az állandósult szögsebesség elérésekor visszacsökken 1600 Nm-re).

Ekkora maximális nyomatékot $F_k = \frac{M}{R} = \frac{33015}{8} = 4126 \text{ N}$ kerületi (súrlódó) erő hoz létre.

A kerület erő (súrlódó erő) létrehozásához szükséges összeszorító erő

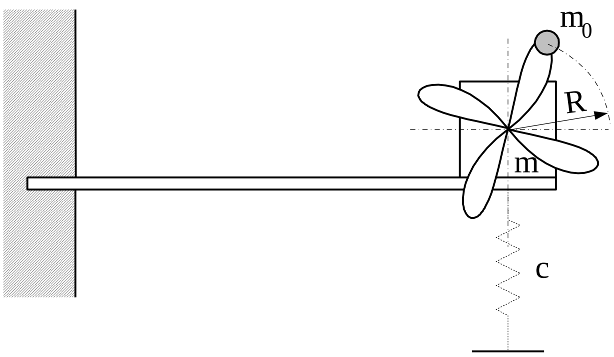
$$N = \frac{F_k}{\mu} = \frac{4126}{0{,}3} = \underline{\underline{13753 \text{ N}}}$$

(Megjegyzés: ez a nagy összeszorító erő nagyon terhelné mind a motor, mind a színpad csapágyait, ezért a valóságban nem egy, hanem három, egymáshoz képest 120 fokos szögben elhelyezett motor forgatja a színpadot. A szimmetria miatt a színpad tengelyét nem terheli összeszorításból eredő erő)

PÉLDA

Lengőrendszer hangolása

Egy m=8 kg tömegű ventilátor szögsebessége ω=75 rad/s. A ventilátor R=0,15 m sugarú lapátján m_0=0,05 kg excentrikus tömeg (szennyeződés) van. A ventilátor c=40000 N/m merevségű konzolra van rögzítve. Mekkora csillapítót kell alkalmazni, ha a ventilátor rezgésamplitúdója nem lehet nagyobb $\hat{x} = 1{,}5$ mm-nél.



Megoldás

A rendszer sajátfrekvenciája

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{40000}{8}} = 70{,}7 \text{ rad/s}$$

A gerjesztőerő (centrifugális erő) amplitúdója

$$\hat{F} = m_0 R \omega^2 = 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 75^2 = 42{,}18 \text{ N}$$

A statikus rezgésamplitúdó

$$\hat{x}_{st} = \frac{\hat{F}}{c} = \frac{42{,}18}{40000} = 0{,}00105 \text{ m}$$

A nagyítási tényező

$$N = \frac{\hat{x}}{\hat{x}_{st}} = \frac{1{,}5}{1{,}05} = 1{,}42$$

A gerjesztő- és a sajátfrekvenciák aránya

$$r = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{75}{70{,}7} = 1{,}06$$

A szükséges Lehr csillapítás a nagyítási függvényből számítható:

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4D^2r^2}} \quad \rightarrow \quad D = \frac{\sqrt{1-N^2(1-r^2)^2}}{2Nr} = \frac{\sqrt{1-1{,}42^2(1-1{,}06^2)^2}}{2 \cdot 1{,}42 \cdot 1{,}06} = 0{,}327$$

A csillapítási tényező:

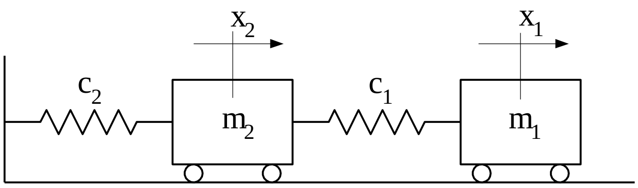
$$k = 2D\sqrt{mc} = 2 \cdot 0{,}327 \cdot \sqrt{8 \cdot 40000} = \underline{\underline{369{,}9\ \mathrm{Ns/m}}}$$

Megjegyzés:
Ha nem lenne csillapítás (D=0), akkor a rezgésamplitúdó

$\hat{x} = \hat{x}_{st} \dfrac{1}{1-r^2} = 0{,}00105 \dfrac{1}{|1-1{,}06^2|} = 0{,}0084\ \mathrm{m}$ lenne.

PÉLDA
Két szabadságfokú rendszer sajátfrekvenciái

Adott a c_1, c_2 rugómerevségekből és m_1, m_2 tömegekből álló gerjesztetlen lengőrendszer. Határozzuk meg a rendszer sajátfrekvenciáit!



Megoldás
A tömegek free-body diagramjait megrajzolva a mozgásegyenletek:

$$-c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) = m_1\ddot{x}_1$$
$$-c_2(x_2 - x_1) = m_2\ddot{x}_2$$

Mivel a csillapítás elhanyagolható, ezért a tömegek harmonikus rezgőmozgást végeznek, gyorsulásaik rendre arányosak a kitéréssel, $\ddot{x}_1 = -\alpha^2 x_1$ és $\ddot{x}_1 = -\alpha^2 x_1$.
A mozgásegyenletekbe helyettesítve

$$-(c_1 + c_2 - m_1\alpha^2)x_1 + c_2x_2 = 0$$
$$c_2x_1 - (c_2 - m_2\alpha^2)x_2 = 0$$

Mátrixosan felírva az egyenletrendszert

$$\begin{bmatrix} -(c_1 + c_2 - m_1\alpha^2) & c_2 \\ c_2 & -(c_2 - m_2\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus:

$$m_1m_2\alpha^2 - (c_1m_1 + c_1m_2 + c_2m_2)\alpha^2 + c_1c_2 = 0$$

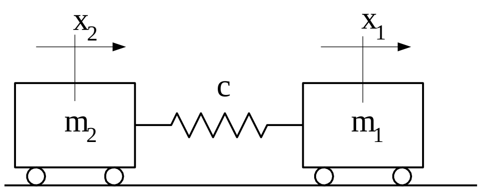
A másodfokúra visszavezethető egyenletből két sajátfrekvencia adódik:

$$\alpha^2_{1,2} = \frac{c_1m_1 + c_1m_2 + c_2m_2 \pm \sqrt{(c_1m_1 + c_1m_2 + c_2m_2)^2 - 4m_1m_2c_1c_2}}{2m_1m_2}$$

PÉLDA

Szabad lengőrendszer sajátfrekvenciája

Adott az m_1 és m_2 tömeg, c merevségű rugóval összekapcsolva (Pl. teherautó pótkocsival). Határozzuk meg a lengőrendszer sajátfrekvenciáját!



1. Megoldás

Vegyük észre, hogy egyik tömeg sincs a falhoz rögzítve rugóval, azaz <u>szabad rendszerrel</u> állunk szemben!

A mozgásegyenleteket felírva (nincs csillapítás, a mozgás harmonikus rezgőmozgás, itt a gyorsulás a kitérés $-\alpha^2$-szerese)

$$-c(x_1 - x_2) = m_1\ddot{x}_1 = m_1(-\alpha^2 x_1)$$

$$c(x_1 - x_2) = m_2\ddot{x}_2 = m_2(-\alpha^2 x_2)$$

Mátrixosan felírva az egyenletrendszert

$$\begin{bmatrix} -c + m_1\alpha^2 & c \\ c & -c + m_2\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszernek akkor van megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus

$$(-c + m_1\alpha^2)(-c + m_2\alpha^2) - c^2 = 0$$

Innen

$$\alpha^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1m_2} = \frac{c}{\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}} = \frac{c}{m_{red}}$$

Vagyis a szabad rendszer sajátfrekvenciája visszavezethető a kötött rendszerre, csak m helyébe m_{red} kerül.

2. Megoldás

Fejezzük ki a gyorsulásokat a mozgásegyenletekből!

$$\ddot{x}_1 = -\frac{c}{m_1}(x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{c}{m_2}(x_1 - x_2)$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból

$$(x_1 - x_2\ddot{)} = -c(x_1 - x_2)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\Delta\ddot{x} + \underbrace{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\alpha^2} \cdot \Delta x = 0$$

Vegyük észre, hogy ez a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete (Mechatronika alapjai 1)!

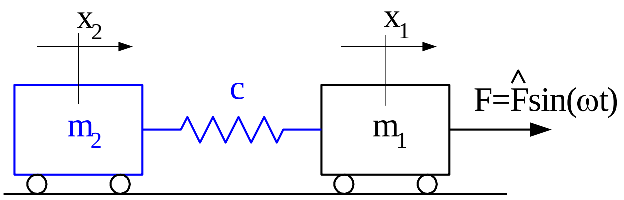
$$\alpha^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} = \frac{c}{\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} = \frac{c}{m_{red}}$$

mint előbb.

PÉLDA

Dinamikus lengésfojtó

Az m_1 tömegre ω körfrekvenciájú $\hat{F}\sin\omega t$ szinuszos erőgerjesztés hat. A tömeghez egy c merevségű rugóból és m_2 tömegből álló járulékos lengőrendszert (dinamikus lengésfojtót) kapcsolunk. Bizonyítsuk be, hogy a járulékos lengőrendszer (dinamikus lengésfojtó) megfelelő hangolásával elérhető, hogy az m_1 tömeg nyugalomban maradjon a gerjesztés ellenére is.



Megoldás

A tömegek free-body diagramjait megrajzolva és a mozgásegyenleteket felírva

$$F - c(x_1 - x_2) = m_1\ddot{x}_1$$
$$c(x_1 - x_2) = m_2\ddot{x}_2$$

Laplace transzformálva zérus kezdeti feltételekkel, és a második egyenletből kifejezve

$X_2(s) = \dfrac{c}{m_2 s^2 + c} X_1(s)$ -t és az első egyenletbe helyettesítve, a következő átviteli függvényt kapjuk:

$$Y(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m_2 s^2 + c}{s^2(m_1 m_2 s^2 + c(m_1 + m_2))}$$

Szinuszos erőgerjesztés esetén a frekvencia-átviteli függvény (s=jω)

$$Y(j\omega) = \frac{-m_2\omega^2 + c}{-\omega^2(-m_1 m_2 \omega^2 + c(m_1 + m_2))} = A(j\omega)$$

Ha azt szeretnénk, hogy az x_1 rezgéskitérés zérus legyen, akkor az A(jω) amplitúdó nagyításnak zérusnak kell lenni. Egy tört akkor zérus, ha számlálója zérus:

$$-m_2\omega^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \alpha = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$$

Vagyis a rezgéstől védendő testhez egy olyan lengőrendszert kell csatolni, melynek sajátfrekvenciája megegyezik a gerjesztés frekvenciájával!

Megjegyzés:
Ezt a módszert akkor lehet alkalmazni, amikor a gerjesztés frekvenciája ismert és állandó (pl. villamos erőművek 50 Hz generátorai, hálózati szinkron gépek, stb.)

Bár a védett m_1 tömeg nyugalomban marad, a lengésfojtó m_2 tömege nem marad nyugalomban.

$$X_2(s) = \frac{c}{m_2 s^2 + c} X_1(s) = \frac{c}{m_2 s^2 + c} \cdot \frac{m_2 s^2 + c}{s^2(m_1 m_2 s^2 + c(m_1 + m_2))} F(s)$$

A 2. tömegre vonatkozó átviteli függvény

$$Y_2(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{c}{s^2(m_1 m_2 s^2 + c(m_1 + m_2))}$$

A gerjesztés $\omega=(c/m_2)^{-1/2}$ körfrekvenciáján az amplitúdó nagyítás

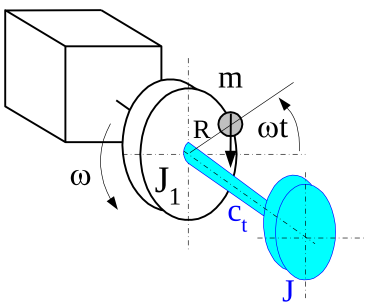
$$A_2(\omega) = \left| \frac{c}{-\omega^2(-\omega^2 m_1 m_2 + c(m_1 + m_2))} \right| = \frac{c}{\left| \frac{c^2}{m_2^2} m_1 m_2 - \frac{c}{m_2} c(m_1 + m_2) \right|} = \frac{1}{c}$$

Vagyis a lengésfojtó m_2 tömegének lengés-amplitúdója

$$\hat{x}_2 = \frac{\hat{F}}{c}$$

PÉLDA
Dinamikus lengésfojtó torziós rendszerre

Egy 2880 ford/perc fordulatszámú aszinkron villanymotor tengelyén lévő R=0,1 m sugarú tárcsán m=0,2 kg nagyságú kiegyensúlyozatlan tömeg van elhelyezve. A tárcsa forgását szeretnénk egyenletessé tenni egy járulékos torziós lengőrendszer alkalmazásával. Határozzuk meg a dinamikus lengésfojtó paramétereit!



Megoldás

A motor minden egyes fordulata alatt egy-egy szinuszos gerjesztési periódus zajlik le: amikor a kiegyensúlyozatlan tömeg emelkedik, súlyereje fékezi a forgást, amikor lefele mozog, gyorsítja a mozgást, következésképpen a forgás egyenetlen. A gerjesztő nyomaték a tömeg súlyának és az aktuális sugárnak a szorzata:

$$M = mg \cdot R\cos(\omega t)$$

A torziós rezgéseket megakadályozó dinamikus lengésfojtó sajátfrekvenciája egyenlő kell legyen a gerjesztés (jelen esetben a motor) körfrekvenciájával:

$$\sqrt{\frac{c_t}{J}} = \omega$$

A motor körfrekvenciája

$$\omega = 2\pi\frac{n}{60} = 2\pi\frac{2880}{60} = 301{,}44 \ \ \mathrm{rad/s}$$

Egy paramétert szabadon választhatunk. Legyen a tengely torziós (csavarási) rugómerevsége $c_t = \frac{I_p G}{L} = 2000 \ \ \mathrm{Nm/rad}$, akkor a ráerősített tárcsa tehetetlenségi nyomatéka

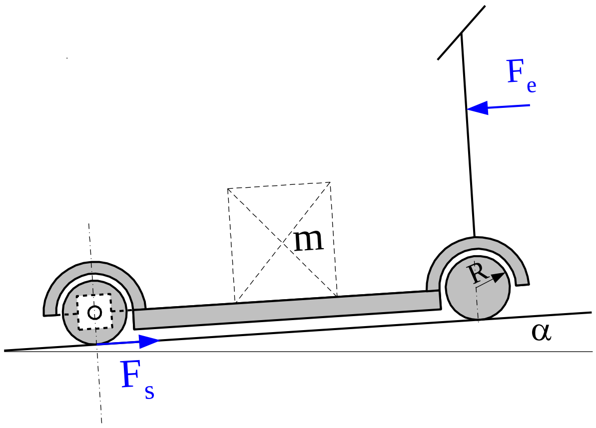
$$J = \frac{c_t}{\omega^2} = \frac{2000}{301{,}44^2} = 0{,}022 \ \ \mathrm{kgm}^2$$

Mint látható, a dinamikus lengésfojtó paraméterei függetlenek a gerjesztés $\hat{M} = mgR$ amplitúdójától. Ugyanakkor a lengésfojtó tömegének kitérése már függ a gerjesztés nagyságától.

PÉLDA

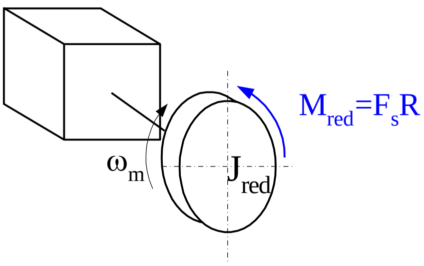
Elektromos roller motorjának kiválasztása

Egy személlyel együtt m=80 kg tömegű roller maximális sebessége v=7 m/s, miközben α=3 fokos emelkedőn halad. A légellenállás és gördülési ellenállás együttesen F_e=25 N. Válasszunk 24V kapocsfeszültségű DC motort a járműhöz és határozzuk meg a sebesség időbeli alakulását indulás után!



Megoldás

A rendszer merev, minden hatás a motor tengelyére redukálható.



A tömeg redukálása a motor tengelyére (mozgási energiák egyenlősége)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J_{red}\omega^2 \quad \rightarrow \quad J_{red} = mR^2 = 80\cdot 0{,}05^2 = 0{,}2\ \text{kgm}^2$$

A terhelés a kerék kerületén

$$F = mg\sin\alpha + F_e = 800\cdot 0{,}05 + 25 = 65\ \text{N}$$

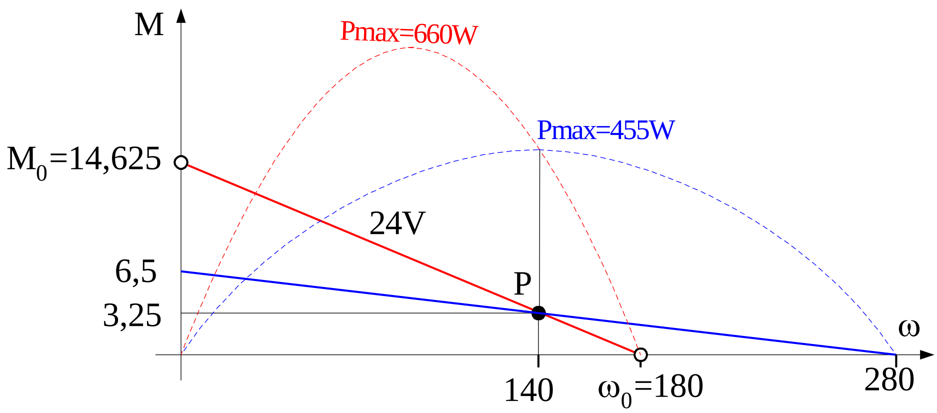
A terhelés redukálása a motor tengelyére (teljesítmények egyenlősége)

$$Fv = M_{red}\omega \quad \rightarrow \quad M_{red} = \frac{Fv}{\omega} = FR = 65\cdot 0{,}05 = 3{,}25\ \text{Nm}$$

A motor (a roller kerekének) maximális szögsebessége

$$\omega_{max} = \frac{v}{R} = \frac{7}{0{,}05} = 140\ \text{rad/s}$$

A munkapont maximális sebességnél P(140; 3,25), a motor teljesítménye ekkor 140·3,25=455 W. Olyan motort kell választanunk, melynek jelleggörbéje adott kapocsfeszültségnél illeszkedik a munkapontra. Végtelen sok lehetőség van:



1) Ha minimális teljesítményű motort választunk, akkor a munkapont éppen a jelleggörbe közepére esik - ugyanis itt adja le a motor maximális teljesítményét (kék jelleggörbe). Ennek az a hátránya, hogy a motor indítónyomatéka elég kicsi (6,25 Nm), üresjárási szögsebessége nagy (280 rad/s) ezért csak hosszú idő alatt tudja felgyorsítani a rollert a végsebességre. A motorkonstansok

$$A = \frac{\omega_0}{u} = \frac{280}{24} = 11{,}66\ \text{rad/sV} \quad \text{és} \quad B = \frac{\omega_0}{M_0} = \frac{280}{6{,}5} = 43\ \text{rad/sNm}$$

A motor egyenlete operátor tartományban

$$\Omega(s) = \frac{A}{Ts+1}U(s) - \frac{B}{Ts+1}(M_{red}(s) + J_{red}s\Omega(s)) = \frac{A}{Ts+1}\cdot\frac{\hat{u}}{s} - \frac{B}{Ts+1}(\frac{M_{red}}{s} + J_{red}s\Omega(s))$$

Rendezés után

$$\Omega(s)=\frac{A\hat{u}-BM_{red}}{s[(T+BJ_{red})s+1]}=\frac{280-43\cdot 3{,}25}{s[(0{,}1+43\cdot 0{,}2)s+1]}=\frac{140}{s(8{,}7s+1)}$$

Idő tartományba visszatranszformálva

$$\omega(t)=140(1-e^{-\frac{t}{8{,}7}})$$

A roller sebességének időfüggvénye

$$v(t)=R\omega(t)=\underline{\underline{7(1-e^{-\frac{t}{8{,}7}})}}\quad m/s$$

A motor teljesíti ugyan a kitűzött célt, de igen lassan éri el végsebességét! (időállandó 8,7 s)

2) Ha nagyobb teljesítményű motort választunk (piros jelleggörbe), melynek hajlásszöge meredekebb (nagyobb az indítónyomatéka és kisebb az üresjárási szögsebessége), akkor rövidebb beállási időre számíthatunk. Legyen az új motor üresjárási szögsebessége 180 rad/s. Ekkor a motor indító nyomatéka

$$\frac{3{,}25}{M_0}+\frac{140}{180}=1\ \rightarrow\ M_0=14{,}625\ \text{Nm}$$

A motor maximális teljesítménye $P_{max}=\frac{M_0\omega_0}{4}=\frac{14{,}625\cdot 180}{4}=658\ \text{W}$

A motorkonstansok A=7,5 és B=12,3. A számítást hasonló módon megismételve, a roller sebessége

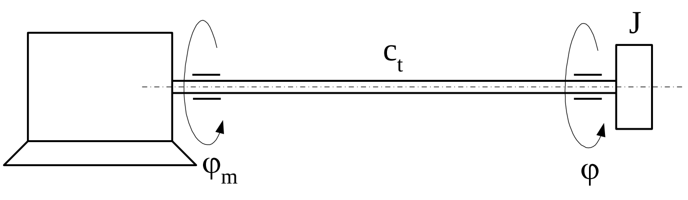
$$v(t)=R\omega(t)=\underline{\underline{7(1-e^{-\frac{t}{2{,}56}})}}\quad m/s$$

A végsebességet ez a roller harmadannyi idő alatt eléri, de ennek az ára a nagyobb teljesítményű motor!

PÉLDA

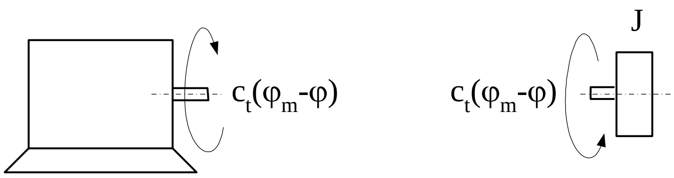
Rugalmas hajtáslánc

Egy DC motorral hosszú, c_t torziós merevségű rugalmas tengelyen keresztül hajtunk egy J tehetetlenségi nyomatékú tárcsát. Határozzuk meg a tárcsa elfordulási szögének $\Phi(s)/U(s)$ átviteli függvényét!



Megoldás

A tárcsára a rugalmas tengely $c_t(\varphi_m-\varphi)$ nyomatékot fejt ki. (A motorra ugyanakkorát, csak ellenkező előjellel).



A tárcsa mozgásegyenlete

$$c_t(\varphi_m - \varphi) = J\ddot{\varphi}$$

A motor szögelfordulását kifejezve operátor tartományban

$$\Phi_m(s) = \frac{Js^2 + c_t}{c_t}\Phi(s)$$

A motor egyenletébe helyettesítve

$$s\frac{Js^2 + c_t}{c_t}\Phi(s) = \frac{A}{Ts+1}U(s) - \frac{B}{Ts+1}Js^2\Phi(s)$$

Rendezés után a keresett átviteli függvény

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{Ac_t}{s[TJs^3 + Js^2 + c_t(T+BJ)s + c_t]}$$

A rendszer harmadrendű (a három független energiatároló a motor forgórésze, a tengely és a tárcsa), integráló jellegű (a nevezőben egy „s” kiemelhető). Látható, hogy egy nem túl bonyolult rendszer is már harmadrendű, és még a szabályozásba bele sem kezdtünk!