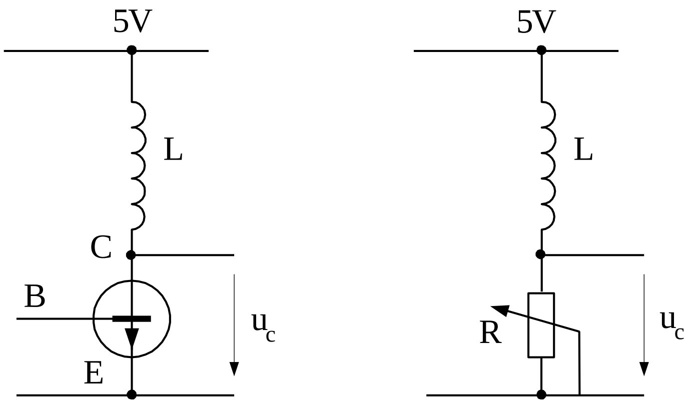
PÉLDA

Paraméter időbeli változásának hatása, numerikus megoldás

Egy L=0,1 H induktivitású tekercset tranzisztorral kapcsolgatunk. A tekercs egyik vége 5V feszültségre van kapcsolva. Amikor a tranzisztor vezet, akkor ellenállása 10Ω. A tranzisztor ellenállása kikapcsolásakor (záráskor) 0,01 másodperc alatt 3 kΩ-mal növekszik közelítőleg lineárisan.



Határozzuk meg numerikus módszerrel a tranzisztor kollektorának u_c feszültségét az idő függvényében!

Válasszuk az idő lépésközt Δt=0,0001 másodpercre, a vizsgálat idejét t_v=0,01 másodpercre!

Megoldás

Az ellenállás időbeli lefolyása

$$R(t) = 10 + 300000 \cdot t \quad \Omega$$

A hurokmódszert alkalmazva

$$5 - L\frac{di}{dt} - iR(t) = 0$$

A differenciálegyenletben egy paraméter, az ellenállás változik. A differenciálegyenletet átírjuk differencia-egyenletté:

$$5 - L\frac{i_{i+1} - i_i}{\Delta t} - i_i(10 + 300000 \cdot t) = 0$$

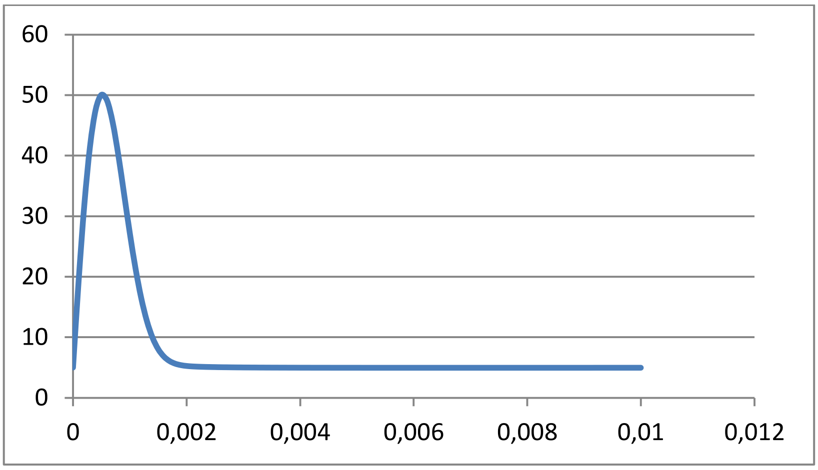
Az adatokat behelyettesítve a rekurzív algoritmus

$$i_{i+1} = i_i - i_i(10 + 300000t) \cdot 0{,}001 + 0{,}005$$

A kezdő érték i(0)=u/R(0)=5/10=0,5 A

A számítást step-by-step végezve Excellel a második oszlopban kiszámítjuk az áramot, a harmadik oszlopban az ellenálláson eső u_c=iR(t) feszültséget

0	0,5	5
0,0001	0,485	19,4
0,0002	0,45605	31,9235
0,0003	0,415445	41,5445
0,0004	0,366437	47,63683
0,0005	0,312807	50,04915

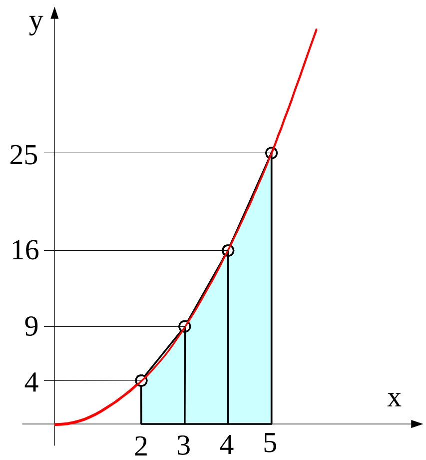


Az ábrán látható, hogy a tranzisztor kollektor feszültsége hirtelen nagyon megnő, ami a tranzisztor tönkremenetelét okozhatja. Ez az oka, hogy miért kell védődiódát beiktatni, amikor tekercset kapcsolgatunk tranzisztorral!

PÉLDA

Numerikus integrálás

Adott egy függvény n darab y_n helyettesítési értéke, egymástól Δx távolságra. Például egy $y=x^2$ egyenletű másodfokú parabola összetartozó függvényértékei:



Határozzuk meg a függvény alatti területet a $2 \le x \le 5$ tartományban numerikusan, trapéz szabállyal!

Megoldás

Az egyes trapézok területeit felírva

$$T = \Delta x\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} + \ldots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

Vegyük észre, hogy az első és az utolsó függvényérték egyszer szerepel, az összes többi kétszer. A képlet így egyszerűsödik:

$$T = \Delta x\left(\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1}\right) = \Delta x\left(\frac{y_1 + y_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i\right)$$

Az adott példa adatait behelyettesítve

$$T = 1 \cdot \left(\frac{4 + 25}{2} + 9 + 16\right) = \underline{\underline{39{,}5}}$$

Összehasonlításul a pontos érték:

$$T = \int_2^5 x^2 dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_2^5 = 39$$

Érthető, hogy a numerikus módszerrel kapott eredmény nagyobb, mivel két osztáspont közötti szelő (a trapéz ferde oldala) végig a függvénygörbe felett halad.

PÉLDA

Numerikus integrálás

Határozzuk meg numerikusan az egyutasan egyenirányított 50 Hz frekvenciájú váltakozófeszültség Fourier-sorának a_2 együtthatóját! Válasszuk az idő lépésközt Δt=0,0002 másodpercre!

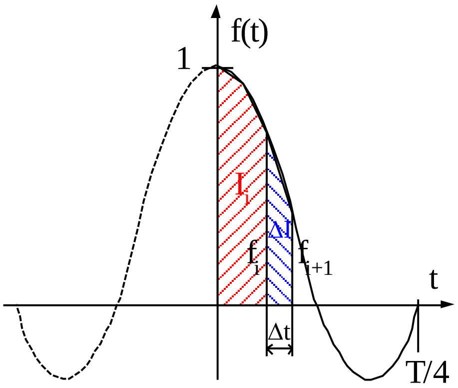
Megoldás

Az analitikus megoldás ismert,

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} \underbrace{\cos\frac{2\pi}{T}t \cdot \cos\frac{2 \cdot 2\pi}{T}t}_{f(t)} \cdot dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/4} \underbrace{\cos\frac{2\pi}{T}t \cdot \cos\frac{2 \cdot 2\pi}{T}t}_{f(t)} \cdot dt = \frac{2}{3\pi}$$

Itt T=0,02 s, ω_0=314 rad/s, az integrálást csak a negyed periódusidőre t=0…..0,005 tartományban kell elvégezni a szimmetria miatt.

A numerikus integrálást trapéz szabállyal végezzük. A függvény integráltja az i+1-dik osztáspontban =a függvény integráltja (görbe alatti területe) az i-dik osztáspontig + az i-dik és i+1-dik osztáspont közötti függvény alatti terület, amit trapéz területével közelítünk.



$$I_{i+1} = I_i + \frac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2} \Delta t$$

A konkrét függvényre

$$I_{i+1} = I_i + \frac{\cos 314 t_i \cos 628 t_i + \cos 314 t_{i+i} \cos 628 t_{i+1}}{2} \cdot 0{,}0002$$

A számítást step-by-step végezve, (T/4)/Δt=25 intervallumra osztva az integrálási tartományt, az első néhány tartományra

t=0 f(0)=1 I=0

t=0,0002 f(0,0002)=0,990162 $I = 0 + \frac{1 + 0{,}990162}{2} 0{,}0002 = 0{,}000199$

t=0,0004 f(0,0004)=0,960985 $I = 0{,}000199 + \frac{0{,}990162 + 0{,}960985}{2} 0{,}0002 = 0{,}000394$

…Excellel végig kiszámítva, az utolsó 25. lépésben

t=0,005 I(0,005)=0,001069

A végeredmény a_2=200·I(0,005)=200·0,001069=**0,213801**

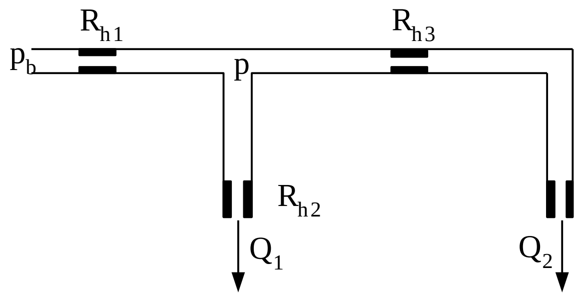
A pontos érték analitikus megoldással (másik példában) $a_2=2/(3\pi)=0{,}2123$

Már a viszonylag nagy lépésközzel végzett numerikus integrálás is két tizedes pontosságú eredményt adott!

PÉLDA

Csőrendszer

Egy lakásba a víz $p_b=4 \cdot 10^5$ Pa túlnyomáson érkezik. Két vízleállás van: egy a konyhában (Q1), egy a fürdőszobában (Q2). Az egyes csőszakaszok és nyitott csapok hidraulikai ellenállásai rendre $R_{h1}=R_{h3}=2 \cdot 10^7$ kg/sm^4; $R_{h2}=R_{h4}=3 \cdot 10^8$ kg/sm^4.



Határozzuk meg a csapokon kifolyó térfogatáramokat, ha

a) Csak az egyik csapot nyitjuk meg
b) Mindkét csapot megnyitjuk

Megoldás

ad a)

Ha csak a konyhai csap van nyitva, akkor

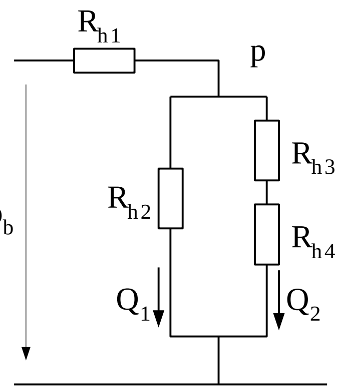
$$Q_1 = \frac{p_b}{R_{h1} + R_{h2}} = \frac{4 \cdot 10^5}{3{,}2 \cdot 10^8} = 0{,}00125 \ m^3/s$$

Ha csak a fürdőszobai csap van nyitva, akkor

$$Q_2 = \frac{p_b}{R_{h1} + R_{h3} + R_{h4}} = \frac{4 \cdot 10^5}{3{,}4 \cdot 10^8} = 0{,}00117 \ m^3/s$$

ad b)

Ha mindkét csap egyszerre van nyitva, akkor a párhuzamos hidraulikus ellenállások eredője



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{h2}} + \frac{1}{R_{h3} + R_{h4}} \quad \rightarrow \quad R_e = 1{,}548 \cdot 10^8 \ kg/sm^4$$

A keresztváltozó osztó p nyomása

$$p = \frac{R_e}{R_{h1} + R_e} p_b = \frac{1{,}548 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^7 + 1{,}548 \cdot 10^8} 4 \cdot 10^5 = 3{,}542 \cdot 10^5 \ Pa$$

Az egyes térfogatáramok

$$Q_1 = \frac{p}{R_{h2}} = \frac{3{,}542 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8} = 0{,}00118 \ m^3/s$$

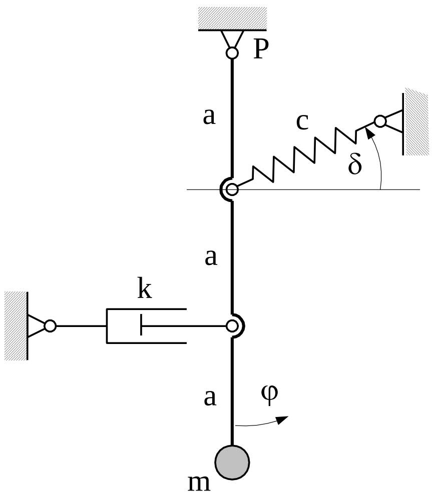
$$Q_2 = \frac{p}{R_{h3} + R_{h4}} = \frac{3{,}542 \cdot 10^5}{3{,}2 \cdot 10^8} = 0{,}00110 \ m^3/s$$

Kismértékben csökkent a csapokon kifolyó víz térfogatárama, ha egyszerre vannak nyitva. Vegyük észre, hogy a hidraulikus és villamos rendszerek között milyen nyilvánvaló az analógia.

PÉLDA

Lengőrendszer sajátfrekvenciája

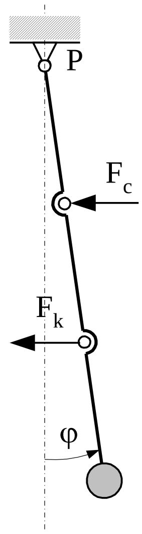
Határozzuk mg az ábrán látható, vízszintes síkban mozgó lengőrendszer sajátfrekvenciáját (feltételezzük, hogy a rendszer kis lengéseket végez)!



Adatok: c=3600 N/m; δ=30^0; m=10 kg; k=120 Ns/m;

Megoldás

A ferde rugót helyettesítjük mozgásirányú (rúdra merőleges) rugóval. Ezt követően megrajzoljuk a szabadtest ábrát.



Felírjuk a P pontra a forgómozgás $\sum M = J\ddot{\varphi}$ alapegyenletét.

$$-a\varphi(c \cdot \cos^2 \delta)a - 2a\dot{\varphi}k2a = \underbrace{m(3a)^2}_{J}\ddot{\varphi}$$

Egyszerűsítve és kanonikus alakra hozva:

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{4k}{9m}}_{2D\alpha}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{c \cdot \cos^2 \alpha}{9m}}_{\alpha^2}\varphi = 0$$

Innen a csillapítatlan sajátfrekvencia

$$\alpha = \frac{\cos\delta}{3}\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\cos 30^0}{3}\sqrt{\frac{3600}{10}} = 5{,}47\,\text{rad/s}$$

A Lehr-csillapítás

$$D = \frac{6k}{9\cos\delta\sqrt{mc}} = \frac{6 \cdot 120}{9\cos 30^0\sqrt{10 \cdot 3600}} = 0{,}486$$

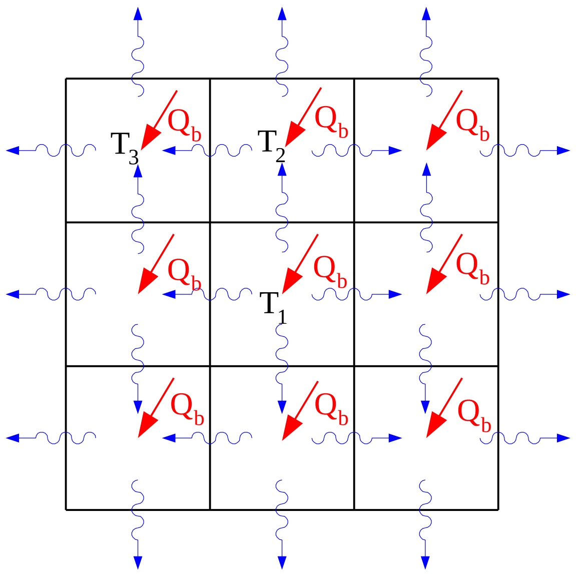
A lengőrendszer valóban lengőképes. A csillapított (valós) sajátfrekvencia

$$\gamma = \alpha\sqrt{1 - D^2} = 5{,}47\sqrt{1 - 0{,}486^2} = \underline{\underline{4{,}78\ \text{rad/s}}}$$

PÉLDA

Termikus rendszer állandósult állapota

Egy irodaházat úgy fűtenek, hogy minden helyiségbe azonos Q_b hőenergia-áramot vezetnek be meleg levegő befúvásával. A szobák egyforma méretűek, az elválasztó falak hőátbocsátási tényezője azonos. Az aljzaton és a mennyezeten keresztül a hőátadás elhanyagolható. A külső hőmérséklet T_k=10 ^{0}C. Határozzuk meg a szobák <u>állandósult</u> hőmérsékletét, ha Q_bR=15 ^{0}C.



Megoldás

Egy A felületű falon Q=R·ΔT hő jut át másodpercenként, ahol R [^{0}Cs/J] a fal termikus ellenállása. Termikus rendszereknél a keresztváltozó a ΔT hőmérséklet különbség, átmenő változó a Q [J/s] hőáram. Tételezzük fel, hogy $T_1>T_2>T_3>T_k$. A sarokszoba a leghidegebb, mert két külső falán adja le a hőt a hidegebb környezetnek, a külső középső szoba valamivel melegebb, mert csak egy fala érintkezik a külső környezettel. A legmelegebb a középső szoba, mert a külső hűvös környezettel nincs közvetlen kapcsolata. A szimmetria miatt csak ez a három szobatípus létezik.

Írjuk fel az egyes szobatípusokra a hőáramokra vonatkozó csomóponti törvényt! Pozitívak a bemenő hőáramok, negatívak az elmenő hőáramok. Állandósult állapotban a szobák hőmérséklete már nem változik, a hőkapacitásokkal nem kell számolni.

T_3 hőmérsékletű sarokszoba:

$$Q_b + 2\cdot\frac{T_2 - T_3}{R} - 2\cdot\frac{T_3 - T_k}{R} = 0$$

T_2 hőmérsékletű külső középső szoba:

$$Q_b + \frac{T_1 - T_2}{R} - 2\cdot\frac{T_2 - T_3}{R} - \frac{T_2 - T_k}{R} = 0$$

T_1 hőmérsékletű belső szoba:

$$Q_b - 4\cdot\frac{T_1 - T_2}{R} = 0$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$T_1 = \frac{9}{8}\cdot Q_b R + T_k = \frac{9}{8}15 + 10 = \underline{\underline{26,8}}\ {}^0\mathrm{C}$$

$$T_2 = \frac{7}{8}\cdot Q_b R + T_k = \frac{7}{8}15 + 10 = \underline{\underline{23,1}}\ {}^0\mathrm{C}$$

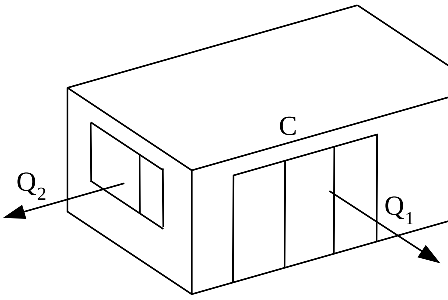
$$T_3 = \frac{25}{16}\cdot Q_b R - \frac{1}{2}T_k = \frac{25}{16}15 - 5 = \underline{\underline{18,4}}\ {}^0\mathrm{C}$$

.

PÉLDA

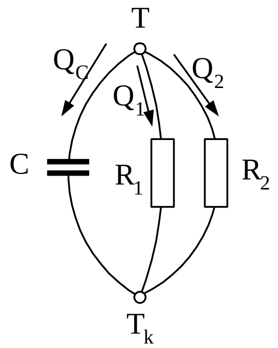
Termikus rendszer dinamikus állapota

Egy szobában kikapcsolták a fűtést, mikor elmentek otthonról. A szoba hőmérséklete ekkor 22 ^{0}C volt. A szoba jó hőszigetelésű, csak azon a két oldalán ad le hőt, ahol ablak van. Ezeknek a falaknak a termikus ellenállása R_1=1 ^{0}Cs/J és R_2=2 ^{0}Cs/J. A szobában lévő levegő hőkapacitása (C=tömeg*fajhő, azaz 1 fok hőmérséklet növeléshez szükséges energia) C=120000 J/^{0}C. A külső hőmérséklet T_k=10 ^{0}C. Mennyi idő alatt csökken a szoba hőmérséklete 18 fokra?



Megoldás

A csomóponti módszert felírva a hőáramokra



$$C\frac{d(T-T_k)}{dt}+\frac{T-T_k}{R_1}+\frac{T-T_k}{R_2}=0$$

Vezessük be a $T^*=T-T_k$ és $R_e=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ új változókat

$$C\frac{dT^*}{dt}+\frac{T^*}{R_e}=0 \quad\rightarrow\quad R_eC\frac{dT^*}{dt}+T^*=0$$

Az elsőrendű rendszer időállandója $\tau=R_eC=\dfrac{1\cdot 2}{1+2}\cdot 120000=80000\text{ s}=22{,}2\text{ óra}$.

A hőmérséklet időbeli változása

$$T^*=T-T_k=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

A kezdeti feltétel: ha t=0, akkor T=22. Innen K=12.

$$T-T_k=12e^{-\frac{t}{\tau}} \quad\rightarrow\quad T=T_k+12e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Innen a 18 fokra való lehűlés ideje

$$18 = 10 + 12e^{-\frac{t_{18}}{\tau}} \quad \rightarrow \quad t_{18} = -(\ln 0{,}666) \cdot 80000 = 32445 \text{ s} = \underline{\underline{9}} \text{ óra}$$

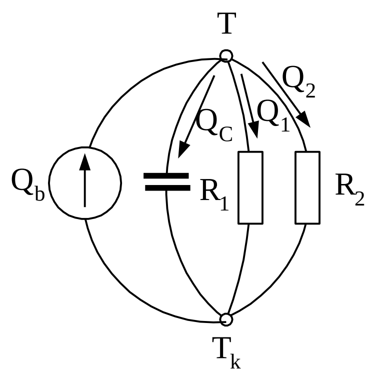
PÉLDA

Termikus rendszer gerjesztéssel

Egy szoba hőmérséklete 18 ^{0}C, amikor a fűtést bekapcsoljuk. A fűtés hőteljesítménye Q_b=1000 J/s. A szoba jó hőszigetelésű, csak azon a két oldalán ad le hőt, ahol ablak van. Ezeknek a falaknak a termikus ellenállása R_1=1 ^{0}Cs/J és R_2=2 ^{0}Cs/J. A szobában lévő levegő hőkapacitása C=120000 J/^{0}C. (1 fokkal való melegítéshez 120000 J szükséges). A külső hőmérséklet T_k=10 ^{0}C. Mennyi idő alatt növekszik a szoba hőmérséklete 22 ^{0}C-ra?

Megoldás

A rendszer gráfja



A fűtőtestnek melegíteni kell a szoba levegőjét és fedezni a hőveszteségeket. A csomóponti törvényt felírva

$$C\frac{d(T-T_k)}{dt} + \frac{T-T_k}{R_1} + \frac{T-T_k}{R_2} = Q_b$$

A homogén egyenlet megoldása

$$T_h^* = T - T_k = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Az időállandó

$$\tau = R_e C = \frac{1 \cdot 2}{1+2} 120000 = 80000 \, \text{s}$$

A partikuláris megoldás

$$T_p^* = Q_b R_e = 1000 \cdot \frac{1 \cdot 2}{1+2} = 666$$

Az általános megoldás

$$T^* = T_h^* + T_p^* = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + 666$$

A kezdeti feltétellel (ha t=0, akkor T*=18-10=8)

$$8 = K + 666 \quad \rightarrow \quad K = -658$$

A 22 fok eléréséig szükséges idő

$$12 = -658e^{-\frac{t}{80000}} + 666 \quad \rightarrow \quad t = -\ln(\frac{654}{658})80000 = 487{,}8\ \text{s} = \underline{\underline{8{,}1}}\ \text{perc}$$

Megjegyzés: egyszerűsített számítást (ellenőrzést) is végezhetünk. Ilyen rövid idő alatt a hőveszteséget elhanyagolva a 4 fok hőmérséklet növeléshez W=cmΔT=CΔT=120000·4=480000 J energia szükséges. A P=1000 W teljesítményű fűtőtesttel t=W/P=480000/1000=480 s=8 perc szükséges a szoba levegőjének felmelegítéséhez. A pontosabb számítás szerint, a hőveszteség figyelembe vételével is csak 0,1 perccel tart tovább a melegítés.

PÉLDA
Rugó potenciális energiája

Egy rugót összenyomva a tárolt potenciális energia E_{pot}. Mekkora erővel hat a rugó (erőtere) az összenyomást végző testre?

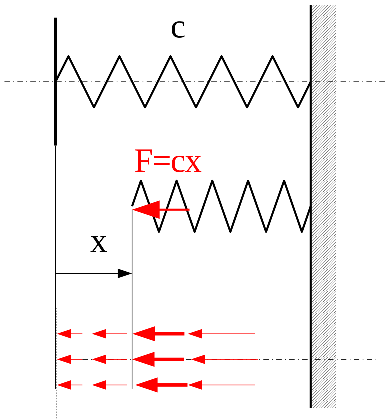
Megoldás
A rugóban tárolt potenciális energia tetszőleges x összenyomódáskor, a rugó potenciál függvénye

$$E_{pot}(x) = \frac{1}{2}cx^2$$

A rugó erőtere által x helyen kifejtett erő

$$F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}cx^2\right) = -cx$$

mint ahogy azt vártuk.



PÉLDA
Nehézségi erőtér

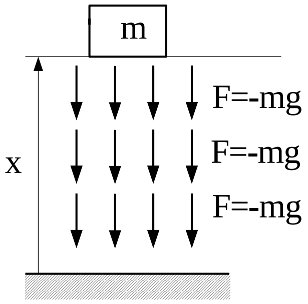
Egy m tömegű testet x magasságba emelünk. Határozzuk meg a nehézségi erőtér által x magasságban a testre kifejtett erőt!

Megoldás
A Föld nehézségi erőterének potenciálja (m tömegű test potenciális energiája tetszőleges x helyen)

$$E_{pot}(x) = mgx$$

Az erőtér által a testre kifejtett erő (tetszőleges) x magasságban

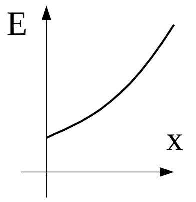
$$F = -\frac{d}{dx} mgx = -mg$$

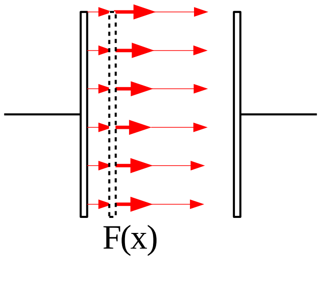


PÉLDA

Kondenzátor

Mekkora erő hat a kondenzátor mikrofon $A=3\cdot10^{-4}$ m^2 felületű fegyverzetei között, ha a fegyverzetek közötti légrés alaphelyzetben $d=10^{-6}$ m, a kondenzátor fegyverzetei közé kapcsolt feszültség 40 V. A levegő dielektromos állandója $\varepsilon=8{,}86\cdot10^{-12}$ F/m.





Megoldás

A villamos erőtér által x-irányba kifejtett erő az erőtér $C(x)u^2/2$ potenciáljának (potenciális energiájának) x-szerinti deriváltja negatív előjellel:

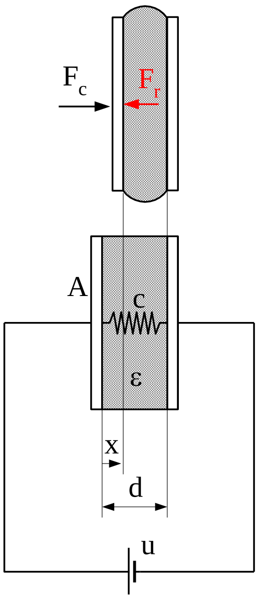
$$F = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon A}{x}u^2\right) = \frac{\varepsilon A}{2x^2}u^2 = \frac{8{,}86\cdot10^{-12}\cdot3\cdot10^{-4}\cdot40^2}{2\cdot10^{-12}} = \underline{\underline{2{,}12}}\ \mathrm{N}$$

PÉLDA

Kapacitív aktuátor, elektroaktív polimer aktuátor (EAP)

Egy síkkondenzátor fegyverzeteinek területe „A”, távolságuk „d”. A fegyverzetek közötti teret „ε"dielektrikumú szigetelő fólia tölti ki, melynek rugómerevsége „c”. A kondenzátor fegyverzeteire u feszültséget kapcsolunk. Mennyivel változik meg a fegyverzetek távolsága?

Adatok: $A=0{,}0001$ m^2; $d=0{,}0005$ m; $u=4000$ V; $c=10^5$ N/m; $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r=10^{-10}$F/m



Megoldás
A kondenzátor fegyverzetei között ható F_e erőt a kondenzátorban tárolt $Cu^2/2$ potenciális energiából számítjuk (Mechatronika alapjai 1)

$$F_e = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon A}{d-x}u^2\right) = -\frac{\varepsilon A u^2}{2(d-x)^2}$$

Kis elmozdulások esetén a nemlineáris összefüggést linearizáljuk az x=0 munkapontban:

$$\left|F_{elin}\right| \approx \frac{\varepsilon A u^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon A u^2}{d^3}x_{lin}$$

Ez az erő nyomja össze a c merevségű dielektrikumot. Az elektromos erőtér F_e ereje és az F_r rugóerő egyensúlyi állapotban megegyezik. A dielektrikum összenyomódása

$$\frac{\varepsilon A u^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon A u^2}{d^3}x_{lin} = cx_{lin}$$

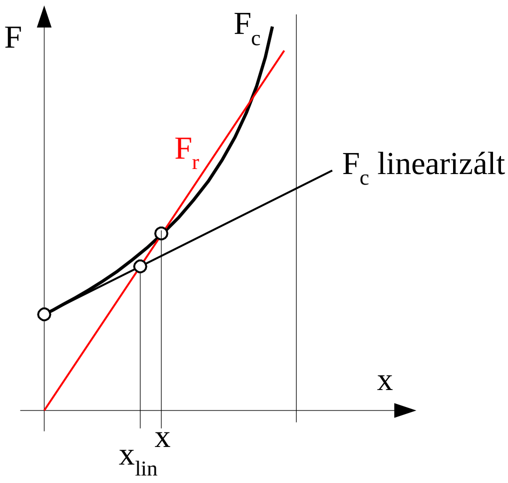
Az elmozdulást kifejezve

$$x_{lin} = \frac{\varepsilon A u^2}{2d^2\left(c - \frac{\varepsilon A u^2}{d^3}\right)} = \frac{10^{-10}10^{-3}4000^2}{2\cdot(5\cdot10^{-4})^2(10^5 - \frac{10^{-10}10^{-3}4000^2}{(5\cdot10^{-4})^3})} = 0{,}0000366\,\text{m} = \underline{\underline{0{,}0366}}\,\text{mm}$$

Megjegyzés 1: az összenyomódás nagyon kicsi, ezért több ezer voltos feszültséget alkalmaznak és több száz aktuátor elemet kapcsolnak sorba, hogy kellően nagy elmozdulást érjenek el.
Megjegyzés 2: ha a munkaponti linearizálást nem végeznénk el, akkor a pontos megoldáshoz a

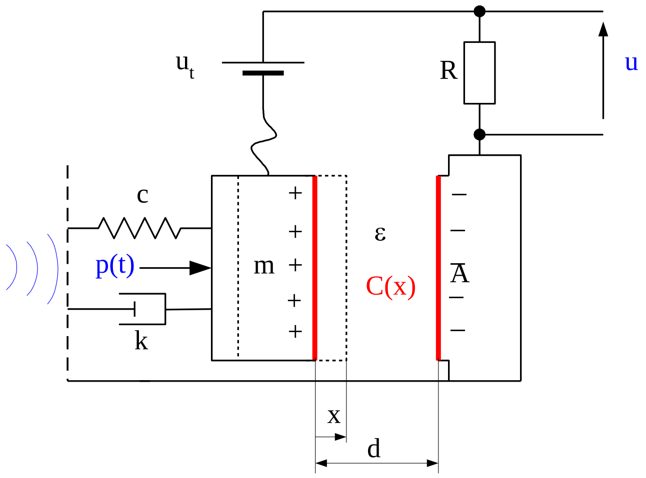
$$\varepsilon A u^2 = 2c(d-x)^2 x$$

harmadfokú egyenletet kellene megoldani (lásd numerikus módszerek).



PÉLDA
Kondenzátor mikrofon

A kondenzátor mikrofon kondenzátorának egyik „A” felületű fegyverzete rögzítve van, a másik „m” tömegű fegyverzet (a membrán) „c” merevségű rugó és „k” csillapító ellenében el tud mozdulni, ha rá a p(t) hangnyomás erőt fejt ki. A fegyverzetek egyensúlyi távolsága „d”, a fegyverzetek közötti légréteg dielektromos állandója „ε”. A kondenzátorhoz „u_t” feszültségforrás és „R” ellenállás kapcsolódik. Az „u” kimenő feszültség az ellenálláson eső feszültség, amit igen nagy bemeneti ellenállású előerősítővel kell erősíteni.
Határozzuk meg a mikrofon U(s)/P(s) kimenő feszültség/hangnyomás átviteli függvényét!



Megoldás
Mivel a Laplace-transzformációt csak lineáris rendszerre lehet alkalmazni, ezért a kondenzátor nemlineáris jelleggörbéjét x=0 munkapontban linearizáljuk:

$$C(x) = \frac{\varepsilon A}{d - x} \approx \frac{\varepsilon A}{d} + \frac{\varepsilon A}{d^2} x$$

A kondenzátor töltése (feltéve, hogy az ellenálláson eső feszültség elhanyagolható a tápfeszültséghez képest)

$$Q(x) = C(x)u_t = \left(\frac{\varepsilon A}{d} + \frac{\varepsilon A}{d^2}x\right)u_t$$

Az áram a töltés idő szerinti deriváltja:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon A u_t}{d^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Laplace-transzformálva

$$I(s) = \frac{\varepsilon A u_t}{d^2}\cdot sX(s)$$

A mechanikus rész modellje a szokásos alakú (ha elhanyagoljuk a villamos tér taszító hatását a fegyverzetek között)

$$X(s) = \frac{A}{ms^2 + ks + c}P(s)$$

A villamos modellbe helyettesítve

$$I(s) = \frac{\varepsilon A u_t}{d^2}\cdot s\frac{A}{ms^2 + ks + c}P(s)$$

A kimenet az ellenálláson eső feszültség

$$U(s) = R\cdot I(s) = \frac{\varepsilon A^2 R u_t}{d^2}\cdot\frac{s}{ms^2 + ks + c}P(s)$$

A mikrofon linearizált átviteli függvénye (feltéve, hogy a csillapítás elég nagy és a nevező két elsőrendű tag szorzatára bontható)

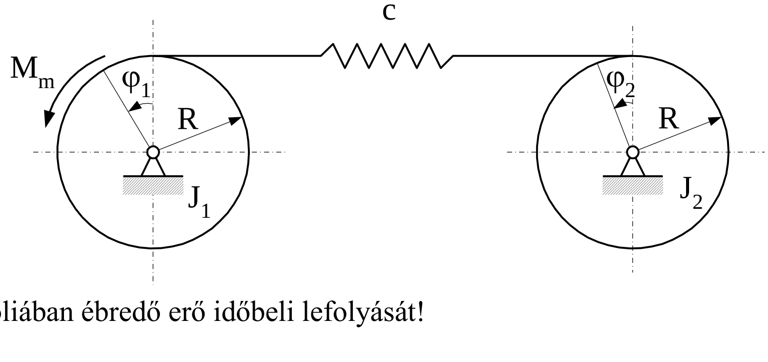
$$\frac{U(s)}{P(s)} = \frac{\varepsilon A^2 R u_t}{d^2}\cdot\frac{s}{ms^2 + ks + c} = \frac{\varepsilon A^2 R u_t}{md^2}\cdot\frac{s}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}$$

Ebben az esetben ω_1 és ω_2 frekvenciák között a mikrofon erősítése állandó (lásd Bode-diagram).

PÉLDA

Rugalmas hajtáslánc

Műanyag fóliát előállító tekercselő gép egyik dobról a másikra csévéli át a fóliát. A J_1=0,2 kgm^2 tehetetlenségi nyomatékú, R=0,2 m sugarú hajtó dobot a motor $M=2\cdot t$ Nm, időben egyenletesen növekvő nyomatékkal kezdi forgatni bekapcsoláskor. A hajtott dob sugara szintén R, tehetetlenségi nyomatéka J_2=0,3 kgm^2. A fólia rugómerevsége c=4000 N/m.



Határozzuk meg a fóliában ébredő erő időbeli lefolyását!

Megoldás

Vegyük észre, hogy ez egy szabad rendszer. A hajtás szabadtest ábrái alapján felírhatjuk a mozgásegyenleteket.

$$M_m(t) - RcR(\varphi_1 - \varphi_2) = J_1\ddot{\varphi}_1$$
$$RcR(\varphi_1 - \varphi_2) = J_2\ddot{\varphi}_2$$

Fejezzük ki a második deriváltakat

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M_m(t) - cR^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{J_1}$$
$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{cR^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{J_2}$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból

$$(\varphi_1 - \varphi_2)^{\cdot\cdot} = -cR^2(\varphi_1 - \varphi_2)\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right) + \frac{M_m(t)}{J_1}$$

Vezessük be a $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ jelölést

$$\Delta\ddot{\varphi} + \underbrace{cR^2\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)}_{\alpha^2} \cdot \Delta\varphi = \frac{A}{J_1} \cdot t$$

A rendszer sajátfrekvenciája

$$\alpha = \sqrt{cR^2\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)} = \sqrt{4000 \cdot 0{,}2^2\left(\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}3}\right)} = 36{,}5 \text{ rad/s}$$

A homogén egyenlet megoldása (harmonikus rezgőmozgás)

$$\Delta\varphi_h = K\sin(\alpha t + \delta)$$

A partikuláris megoldást $\Delta\varphi_p = Bt + C$ alakban keressük.

$$\alpha^2 \cdot (Bt + C) = \frac{A}{J_1} \cdot t$$

Innen t hatványai együtthatóinak összehasonlításából

$$t^0: \quad C = 0$$
$$t^1: \quad B = \frac{A}{J_1\alpha^2}$$

Az általános megoldás $\Delta\varphi = \Delta\varphi_h + \Delta\varphi_p$

$$\Delta\varphi = K\sin(\alpha t + \delta) + \frac{A}{J_1\alpha^2} t$$
$$\Delta\dot{\varphi} = K\alpha\cos(\alpha t + \delta) + \frac{A}{J_1\alpha^2}$$

Az ismeretleneket a kezdeti feltételekből határozzuk meg: t=0 $\Delta\varphi = 0$ $\Delta\dot{\varphi} = 0$.

$$0 = K\sin\delta \quad \rightarrow \quad \delta = 0$$

$$0 = K\alpha\cos\delta + \frac{A}{J_1\alpha^2} \quad \rightarrow \quad K = -\frac{A}{J_1\alpha^3}$$

A kezdeti feltételeket is figyelembe vevő megoldás

$$\Delta\varphi = -\frac{A}{J_1\alpha^3}\sin(\alpha \cdot t) + \frac{A}{J_1\alpha^2}t = \frac{A}{J_1\alpha^2}\left(t - \frac{\sin(\alpha \cdot t)}{\alpha}\right)$$

A fóliában ébredő erő

$$F = c \cdot R\Delta\varphi = \frac{AcR}{J_1\alpha^2}\left(t - \frac{\sin(\alpha \cdot t)}{\alpha}\right) = \frac{2 \cdot 4000 \cdot 0{,}2}{0{,}2 \cdot 36{,}5^2}\left(t - \frac{1}{36{,}5}\sin 36{,}5t\right) = \underline{\underline{6(t - 0{,}027\sin 36{,}5t)}} \quad \text{N}$$