Széchenyi István Egyetem
Mechatronika és Gépszerkezettan Tanszék

Mechatronika alapjai I-II.

Labor mérési útmutató

Másodrendű rendszer vizsgálata

A mérés célja:

1. Másodrendű rendszer amplitúdó-nagyítási diagramjának mérése és megrajzolása lineáris léptékben (rezonanciagörbe).
2. A másodrendű rendszer két jellemzőjének, a „D” csillapításának és az „α" csillapítatlan sajátfrekvenciájának meghatározása méréssel.

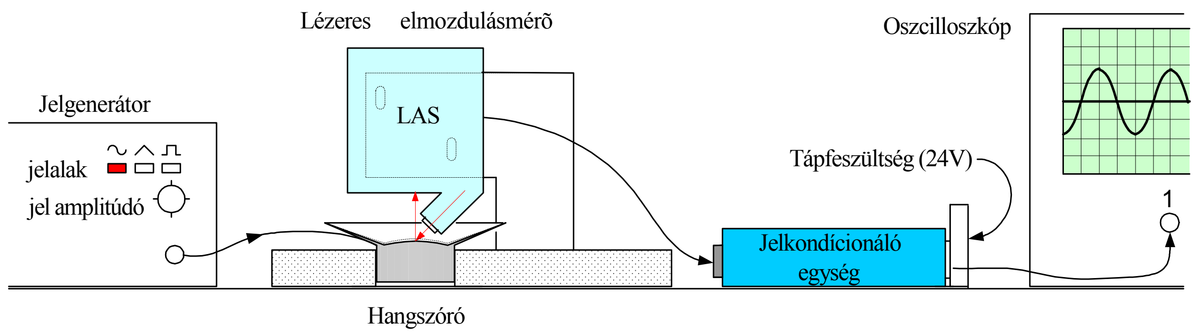
Rendelkezésre álló eszközök: Hangszóró, kettős tápegység, függvénygenerátor, lézeres távolságmérő, oszcilloszkóp.

A mérés leírása:
A hangszórót időben változó feszültséggel gerjesztve annak membránja mechanikus mozgást végez. A laborgyakorlat során a hangszóró, mint másodrendű rendszer vizsgálatával foglalkozunk. Két alapvetően különböző mérést végzünk. Először a rendszer sajátrezgését vizsgáljuk, majd ezt követően a rendszer szinuszos gerjesztésre adott válaszát.

A sajátrezgés vizsgálatához a rendszert ugrásfüggvénnyel (illetőleg azt automatikusan ismétlő kisfrekvenciás négyszögjellel) késztetjük más-más egyensúlyi állapot felvételére. A kimenet, a membrán elmozdulása, csillapodó szinusz rezgés után áll be az új egyensúlyi értékre. A válaszjel tranziens része felfogható úgy is, mint az *egyensúlyi helyzetéből kitérített és magára hagyott rendszer válasza, vagyis a rendszer sajátrezgése*. Ennek periódusidejéből a γ csillapított sajátfrekvencia, az egymást követő maximális kitérések arányából (logaritmokus dekrementum) pedig a Lehr-féle csillapítás meghatározható.

A rezonanciagörbe felvételével is meghatározható a rendszer csillapítása, mivel a maximális amplitúdónagyítás és a csillapítás között egyértelmű összefüggés van (lásd későbbi levezetést)

A mérés során gerjesztésként függvénygenerátor által előállított villamos négyszög- és szinuszjelet alkalmazunk. A rendszer kimenetét, a hangszóró membránjának rezgéseit érintésmentesen, lézeres távolságmérő műszer segítségével mérjük és közvetlenül oszcilloszkópon jelenítjük meg (1. ábra). A lézeres elmozdulásmérő a 0-0,5 mm méréstartományt 0-10V kimenő feszültségre képezi le. A kimenőjel amplitúdója a tárolós oszcilloszkóp kurzorjának mozgatásával pontosan lemérhető. A fázistolás meghatározásával a mérés során nem foglalkozunk.



1. ábra. A mérési összeállítás vázlata

Az elméleti alapok összefoglalása:

1) *Másodrendű rendszer csillapításának meghatározása rezonancia görbéből*

A rezonanciagörbe normalizált (statikus esetben 1-ből induló) egyenlete az alábbi egyszerű dimenziómentes egyenlettel írható le (lásd előadás):

$$A_n(\omega) = \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{x}(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4D^2r^2}} \qquad (1)$$

A rezonanciagörbét egy adott (D=0,2) csillapítási értékre a 2. ábra mutatja. Láthatóan a kitérésnek létezik A* maximuma az $r^*=\omega/\alpha$ dimenziótlan gerjesztőfrekvencia értékénél (ez a rezonancia esete).. A rezonancia csillapítatlan rendszernél (D=0) akkor következik be, mikor a gerjesztés körfrekvenciája megegyezik a rendszer csillapítatlan sajátfrekvenciájával (r=1). A csillapítás növelésével a maximális amplitúdó-nagyítás csökken, a rezonancia helye pedig egyre inkább balra tolódik (r<1). A csillapítás növelésével elérkezünk ahhoz az esethez (D~0,7), amikor a rezonanciagörbének már nincs lokális maximuma.

2. ábra. Rezonanciagörbe (Amplitúdó nagyítási függvény)

A maximális A* amplitúdó nagyítás értéke és a D csillapítás számértéke között egyértelmű kapcsolat áll fenn, melyet a „D" csillapítás meghatározására fogunk felhasználni.
Az A(r) amplitúdó nagyítási függvény maximuma annál az r* dimenziótlan frekvenciánál van, ahol az (1) függvénynek szélsőértéke van, vagyis ahol r-szerinti első deriváltja zérus:

$$\frac{dA(r)}{dr} = -\frac{1}{2}\left[(1-r^2)^2 + 4D^2r^2\right]^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\left[2(1-r^2)(-2r) + 4D^2 2r\right]}_{0} = 0 \qquad (2)$$

A második szögletes zárójel rezonanciában zérus értékű lesz, ha

$$r^* = \sqrt{1-2D^2} \qquad (3)$$

Rezonanciában a maximális amplitúdó-nagyítás értéke ((1)-be helyettesítve (3)-at) a következő:

$$A^*(D) = \frac{1}{\sqrt{(1-(1-2D^2))^2 + 4D^2(1-2D^2)}} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \qquad (4)$$

A (4) egyenletből a keresett „D" csillapítást kifejezhetjük:

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{A^* - \sqrt{A^{*2} - 1}}{2A^*}}} \tag{5}$$

A csillapítás ismeretében pedig (3)-ból a rendszer csillapítatlan sajátfrekvenciája is kiszámítható:

$$\alpha = \frac{\omega^*}{\sqrt{1 - 2D^2}} \tag{6}$$

2) *<u>Másodrendű rendszer csillapításának meghatározása a lecsengési görbéből</u>*
A csillapítás meghatározásához ugrásfüggvény bemenetként kis frekvenciájú, például 20 Hertzes négyszögjelet alkalmazunk. Az átmeneti függvény

$$x(t) = Ke^{-\beta t}(\sin \gamma t + \varphi) \tag{7}$$

alakú csillapodó harmonikus függvény, $T = \dfrac{2\pi}{\gamma}$ periódusidővel (3. ábra).

3. ábra. Átmeneti függvény

Két egymást követő lokális maximum (ilyenkor a zárójeles kifejezés értéke=1) aránya

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{Ke^{-\beta(t+T)}}{Ke^{-\beta t}} = e^{-\beta T} \tag{8}$$

Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát (λ= logaritmikus dekrementum)

$$\lambda = \ln \frac{a_{i+1}}{a_i} = -\beta T = -D\alpha \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{1 - D^2}} = -\frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}} \tag{9}$$

Innen a Lehr-féle csillapítás kifejezhető

$$\boxed{D = \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2}}} \tag{10}$$

A csillapítás és a csillapított rezgések T=2π/γ periódusidejének ismeretében a rendszer csillapítatlan sajátfrekvenciája is kiszámítható:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-D^2}} \qquad (11)$$

A mérés végrehajtása

1) Rezonanciagörbe felvétele

A frekvenciagenerátoron különböző, 1,100,200,….1000Hz frekvenciájú szinuszos jeleket állítunk be, a rezonancia környezetében sűrítve a mérési pontokat, hogy A* és ω* értékét pontosan meghatározhassuk. Eközben oszcilloszkópon figyeljük a jelalakot és a mozgatható vízszintes kurzor segítségével lemérjük a kimenő jel amplitúdóját minden egyes frekvencián. A mérési pontokat táblázatban rögzítjük és a méréssel egyidőben milliméterpapíron ábrázoljuk. Ha „kilógó" pontot kapnánk, ott a mérést megismételjük.
A* és ω* meghatározása után kiszámítjuk a rendszer D csillapítását (5. képlet) és α csillapítatlan sajátfrekvenciáját (6. képlet)

2) Kirezgési görbe felvétele

A csillapított sajátfrekvencia meghatározásához 20 Hertzes frekvenciájú négyszögjelet alkalmazunk. A jelgenerátoron a jelalakot négyszögjelre állítjuk. A helyes jelalak beállítására után a frekvenciaállító gombot finoman tekerve a frekvenciát 20 Hz-re állítjuk. A megállított képen lemérjük a lecsengési görbe maximumai közötti távolságokat (a csillapított rezgés periódusidejét) a függőleges kurzor mozgatásával. Képezzük ezek $\overline{T}_c$ számtani átlagát ($\overline{T}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_{ci}}{n}$)

Ezt követően (9) összefüggéssel kiszámítjuk a logaritmikus dekrementum értékét legalább három egymást követő rezgés esetén és átlagoljuk a kapott értékeket. $\lambda = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)/n$.

Ez után (10) összefüggéssel kiszámítjuk a rendszer D Lehr-féle csillapítását, valamint (11) összefüggéssel a rendszer csillapítatlan sajátfrekvenciáját.

A jegyzőkönyv tartalma

a) Fedőlap, mérés címe, mérést végzők neve.
b) Mérés rövid leírása
c) Rezonanciagörbe milliméter papíron, A* és ω* érték meghatározásával, a mérési pontok értékei táblázatban. D és α értékének számítása a rezonanciagörbe alapján.
d) Kirezgési görbe amplitúdó értékei és periódusidő értékei táblázatban
e) Logaritmikus dekrementum átlagértékének kiszámítása, átlagos periódusidő kiszámítása
f) D és α értékének számítása a kirezgési görbe alapján
g) A kétféle módszerrel meghatározott D és α értékek összehasonlítása, eltérés vagy egyezés szöveges értékelése.
h) Lapok tűzőgéppel összekapcsolva

A mérést megelőzően a mérésre való felkészültség rövid zárthelyivel kerül ellenőrzésre. A labormérésen csak az a hallgató vehet részt, aki a zárthelyin legalább 50 százalékos eredményt ér el.

Ajánlott irodalom:

Horváth: Mechatronika alapjai I-II, SZE, 2007.
Petrik: Finommechanika, MK. Bp, 1974.

Figyelem: a labormérés anyaga a vizsgán számonkérésre kerül!