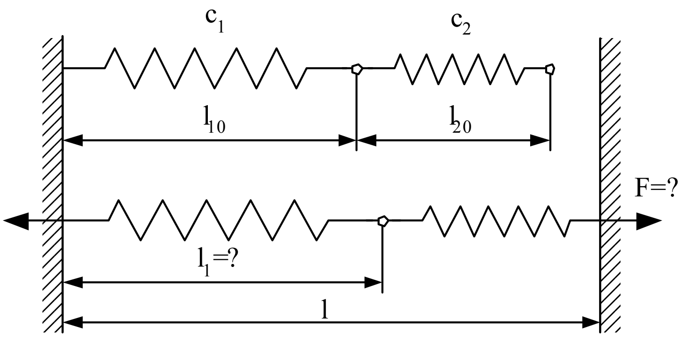
Rugós mechanikai rendszerek modellezése

1. feladat

Adott két sorba kapcsolt rugó „c_1” és „c_2” merevséggel valamint „l_{10}” és „l_{20}” terheletlen hosszal. A rugókat megnyújtjuk úgy, hogy együttes hosszuk „l” legyen ($l>l_{10}+l_{20}$).



a) Mekkora a rugókban ébredő erő?

$$/\ \ F = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(l - l_{10} - l_{20})\ \ /$$

b) Mekkora a c_1 rugó megváltozott hossza?

$$/\ \ l_1 = l_{10} + \frac{c_1}{c_1 + c_2}(l - l_{10} - l_{20})\ \ /$$

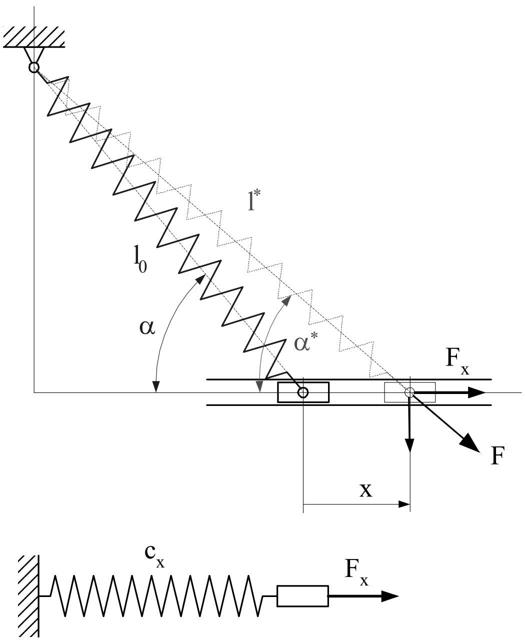
Kidolgozott példa

Egy l_0 terheletlen hosszúságú, „c” merevségű rugó α szög alatt van elhelyezve a vízszintes vezetékhez képest. A rugó alsó vége a vezetékben tud elmozdulni, helyzetét az „x” koordináta jellemzi. A rugó felső vége rögzítve van.

a) Határozza meg a rugó vízszintes irányú merevségét tetszőlegesen nagy elmozdulásokra!

b) A végeredmény felhasználásával mutassa meg, hogy kis alakváltozásokra ($x \to 0$)
$c_x = c \cos^2\alpha$!

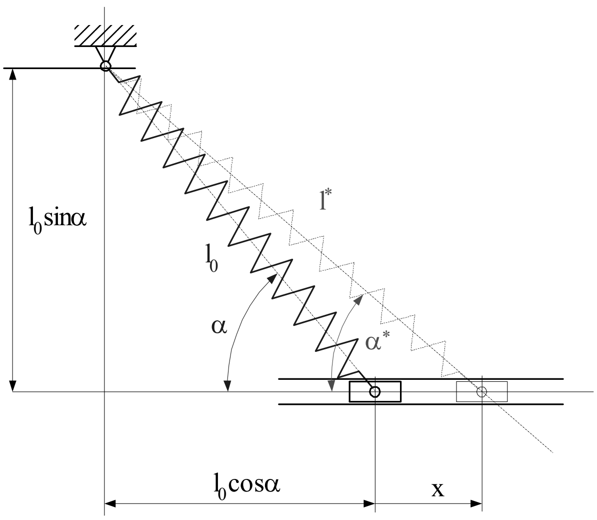
<u>Próbálja önállóan megoldani a példát! Csak végső esetben nézze meg a megoldást!</u>



Megoldás

ad a)

A rugó megváltozott hossza “x” nagyságú elmozdulás esetén az ábra alapján



$$l^* = \sqrt{(l_0 \cos\alpha + x)^2 + (l_0 \sin\alpha)^2}$$

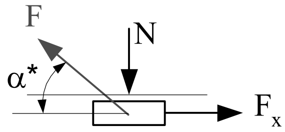
A rugó hosszváltozása (megnyúlása)

$$\Delta l = l^* - l_0 = \sqrt{(l_0 \cos\alpha + x)^2 + (l_0 \sin\alpha)^2} - l_0$$

A rugóban ébredő erő

$$F = c\Delta l = c \cdot (\sqrt{(l_0 \cos\alpha + x)^2 + (l_0 \sin\alpha)^2} - l_0)$$

A „kulisszakő” free-body diagramja



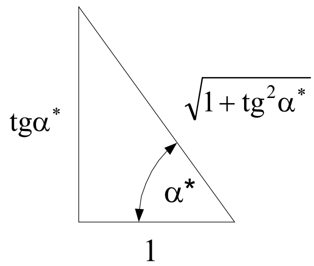
Innen az elmozdulás irányú erő

$$\sum F_{xi} = 0 = -F\cos\alpha^* + F_x \quad \rightarrow \quad F_x = F\cos\alpha^*$$

Az „x” elmozdulás következtében megváltozik a rugó α hajlásszöge α*-ra. Az ábra derékszögű háromszögéből

$$tg\alpha^* = \frac{l_0 \sin\alpha}{l_0 \cos\alpha + x}$$

A továbbiakban a rugóerő F_x vízszintes komponensének számításához cosα*-ra lesz szükségünk. Középiskolai ismeretek alapján Bármely szögfüggvény kifejezhető bármilyen másikkal, így a koszinusz szögfüggvény kifejezhető tangens szögfüggvénnyel az ábra alapján:



$$\cos\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha^*}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(l_0 \sin\alpha)^2}{(l_0 \cos\alpha + x)^2}}}$$

A vízszintes irányú erőkomponens ezzel

$$F_x = F\cos\alpha^* = \underbrace{c \cdot (\sqrt{(l_0 \cos\alpha + x)^2 + (l_0 \sin\alpha)^2} - l_0)}_{F} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(l_0 \sin\alpha)^2}{(l_0 \cos\alpha + x)^2}}}}_{\cos\alpha^*}$$

(Vegye észre, hogy az összefüggés az erő és az elmozdulás között nemlineáris →**nemlineáris rugókarakterisztika**!) Nemlineáris rugókarakterisztika esetén csak egy adott munkapontban értelmezett differenciális rugómerevség értelmezhető.

A vízszintes irányú differenciális rugómerevség a következő:

$$c_x = \frac{dF_x}{dx} = c\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(l_0\cos\alpha + x)^2 + (l_0\sin\alpha)^2}}2(l_0\cos\alpha + x)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(l_0\sin\alpha)^2}{(l_0\cos\alpha + x)^2}}} +$$

$$+c\left(\sqrt{(l_0\cos\alpha + x)^2 + (l_0\sin\alpha)^2} - l_0\right)\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{(l_0\sin\alpha)^2}{(l_0\cos\alpha + x)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}(-2)(l_0\sin\alpha)^2(l_0\cos\alpha + x)^{-3}\right.$$

A deriválásnál a szorzatfüggvény deriválási szabályát, valamint a láncszabályt alkalmaztuk.

ad b)

A c_x előbbi összefüggése x=0 helyettesítéssel (a kis alakváltozásokra vonatkozó összefüggés)

$$c_x = \left.\frac{dF_x}{dx}\right|_{x=0} = c\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(l_0\cos\alpha)^2 + (l_0\sin\alpha)^2}}2(l_0\cos\alpha)\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(l_0\sin\alpha)^2}{(l_0\cos\alpha)^2}}}}^{\cos\alpha} +$$

$$+\underbrace{c\left(\sqrt{(l_0\cos\alpha)^2 + (l_0\sin\alpha)^2} - l_0\right)}_{0}\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{(l_0\sin\alpha)^2}{(l_0\cos\alpha)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}(-2)(l_0\sin\alpha)^2(l_0\cos\alpha)^{-3}\right. = c\cdot\cos^2\alpha$$

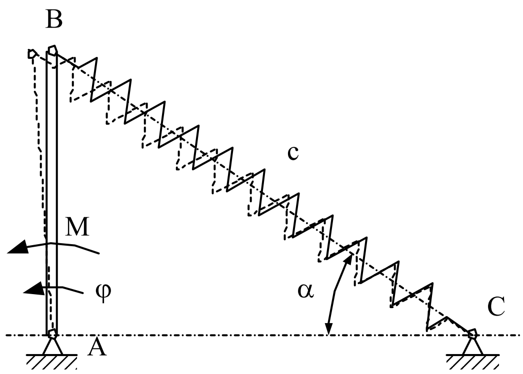
a jól ismert

$$c_x\big|_{x=0} = c\cdot\cos^2\alpha$$

képletet eredményezi.

2. feladat

Az AB=r kar függőleges helyzetében az “α” hajlásszögű, “c” merevségű rugó terheletlen állapotban van.

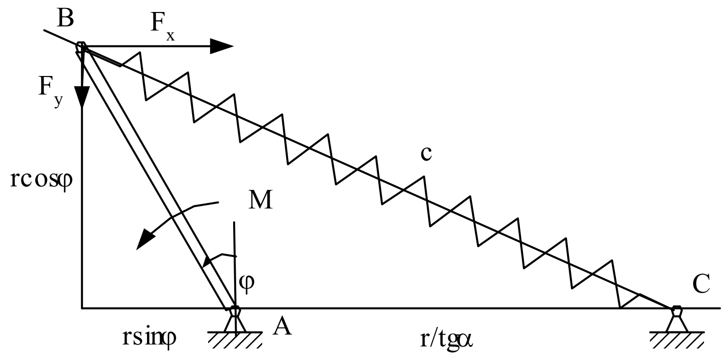


a) Az AB karra “M” nyomatékot működtetve a kar “φ” szöggel elfordul. Határozza meg az M nyomaték és a φ elfordulási szög kapcsolatát kis elfordulási szög esetén (lineáris modell)! (Először helyettesítse a ferde rugót mozgásirányú, vízszintes rugóval)

/ $M = cr^2 \cos^2 \alpha \cdot \varphi$ /

b) Határozza meg az M nyomaték és a φ elfordulási szög kapcsolatát tetszőlegesen nagy elfordulási szög esetén (nemlineáris modell)!

(Segítség: vegye alapul a megváltozott geometriát az ábra szerint. Számítsa ki a megváltozott rugóhosszat, a rugó hosszváltozását, a rugóban ébredő erőt, a rugó megváltozott hajlásszögét, majd írja fel az erő komponenseinek nyomatékát az A pontra.)



$$/ \quad M = cr^2 \frac{\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}+\frac{2\sin\varphi}{tg\alpha}} - \sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}}{\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}+\frac{2\sin\varphi}{tg\alpha}}} \left[(\sin\varphi + \frac{1}{tg\alpha})\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \right] \quad /$$

Vegyük észre, hogy $\varphi \to 0$ határátmenet esetén

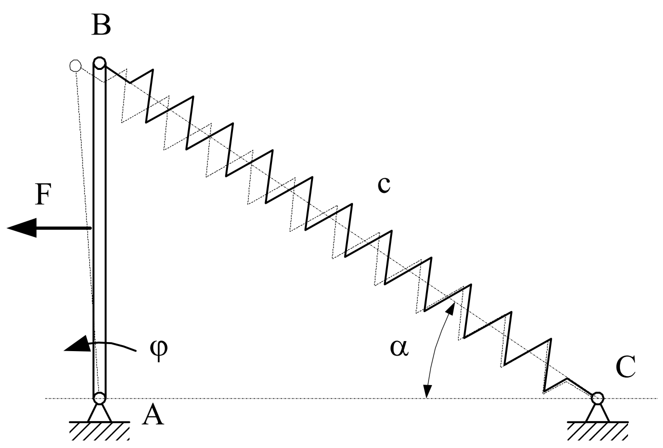
$$\sin\varphi \to \varphi,\ \cos\varphi \to 1,\ \sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}+\frac{2\sin\varphi}{tg\alpha}} \to 1+\frac{1}{2}(\frac{1}{tg^2\alpha}+\frac{2\varphi}{tg\alpha})\,.$$

Ezen értékek helyettesítésével visszakapjuk a kis elmozdulásra levezetett a) pontbeli összefüggést. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha kiszámítjuk a dM/dφ differenciális rugómerevséget a φ=0 helyen.

----

3. feladat

Az előző 2. feladat AB rúdjára F erő hat a rúd közepén.



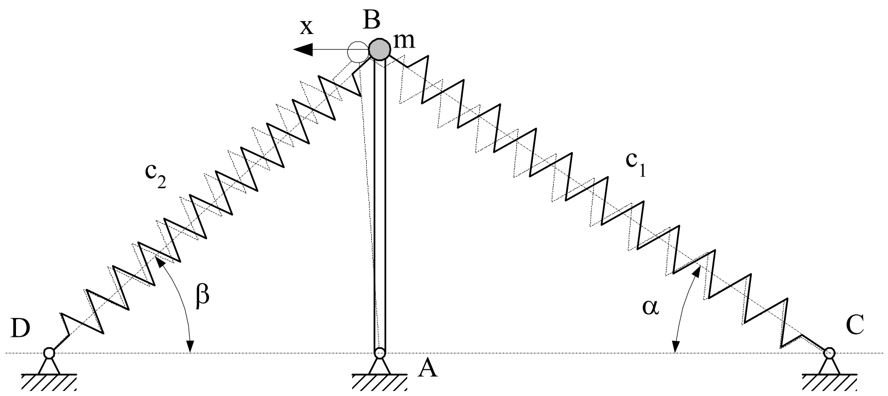
a) Határozza meg az F erő és a φ szögelfordulás kapcsolatát kis elmozdulásokra!

/ $F = 2cr\cos^2\alpha \cdot \varphi$ /

----

4. feladat

Az ábrán látható rendszer két ferde rugóból, az elhanyagolható tömegű merev AB karból, valamint egy “m” tömegpontból áll.



a) Írja fel az “m” tömegpont x(t) mozgásegyenletét kis alakváltozásokra!

/ $m\ddot{x} + (c_1\cos^2\alpha + c_2\cos^2\beta)x = 0$ /

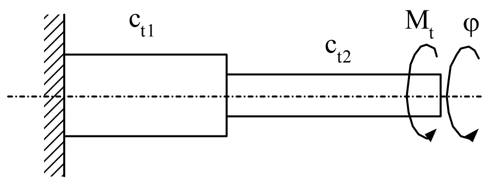
b) Mekkora a rendszer sajátlengéseinek körfrekvenciája?

/ $\alpha = \sqrt{\dfrac{c_1\cos^2\alpha + c_2\cos^2\beta}{m}}$ /

----

5. feladat

a) Határozza meg a c_{t1} és c_{t2} torziós rugókból álló lépcsős tengely végének M-φ kapcsolatát!



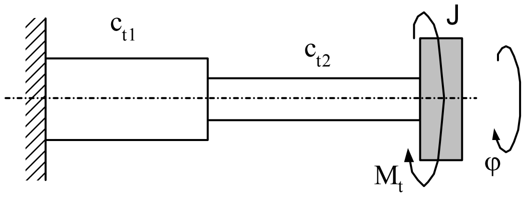
$$/\ M_t = (\frac{1}{c_{t1}} + \frac{1}{c_{t2}})\varphi\ /$$

b) Mekkora c_{t1} és c_{t2}, ha a tengelyszakaszok átmérői rendre d_1 és d_2, hosszuk l_1 és l_2. A tengely anyagának nyírási modulusa G.

---

6. feladat

Az előző feladat szerinti tengely végére erősített J tehetetlenségi nyomatékú tárcsára $M_t(t)$ csavaró nyomaték hat.



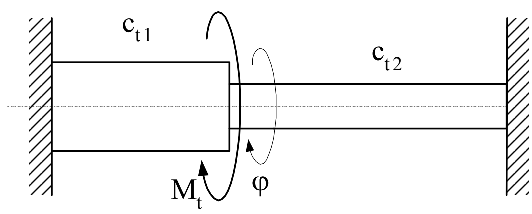
a) Írja fel tárcsa φ(t) mozgásegyenletét!

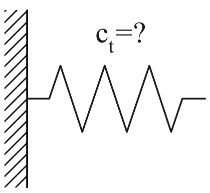
$$/\ J\ddot{\varphi} + (\frac{1}{c_{t1}} + \frac{1}{c_{t2}})\varphi = 0\ /$$

---

7. feladat

a) Írja fel a két végén befogott lépcsős tengelyt terhelő M_t csavarónyomaték és φ szögelfordulás kapcsolatát!





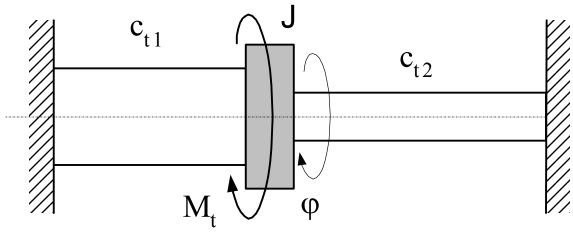
b) Mekkora az eredő torziós rugómerevség?

$$/ \quad c_t = c_{t1} + c_{t2} \quad /$$

---

8. feladat

Az előző 8. feladatban szereplő tengelyre J tehetetlenségi nyomatékú tárcsát erősítünk.



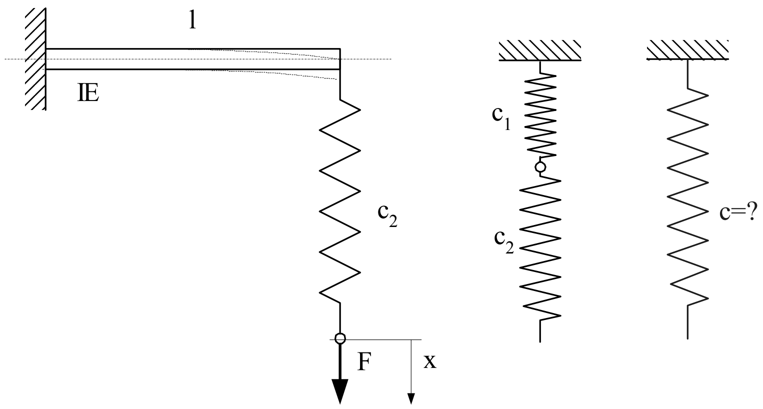
Írja fel a tárcsa φ(t) mozgásegyenletét!

$$/ \quad J\ddot{\varphi} + (c_{t1} + c_{t2})\varphi = 0 \quad /$$

---

9. feladat

Az „l_0" hosszúságú, „IE" hajlító merevségű konzol végéhez „c_2" merevségű rugót rögzítünk.



a) A rugók deformációja, vagy a rugókat terhelő erő egyezik-e meg? (Párhuzamos, vagy soros kapcsolásúak-e)

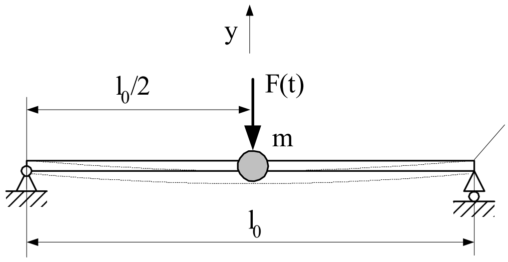
b) Határozza meg a rendszer "c" eredő rugómerevségét!

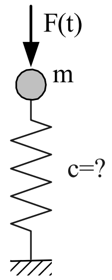
$$/ \quad \frac{1}{c} = \frac{l_0}{AE} + \frac{1}{c_2} \quad /$$

---

10. feladat

Az „IE" hajlító merevségű, elhanyagolható tömegű kéttámaszú tartó közepére „m" tömeget rögzítünk, melyre F(t) gerjesztő erő hat.





a) Határozza meg a tartó, mint rugó, egyenértékű rugómerevségét!
(Segítség: Mechanika járulék képletek)

$$/ \quad c = \frac{48IE}{l_0} \quad /$$

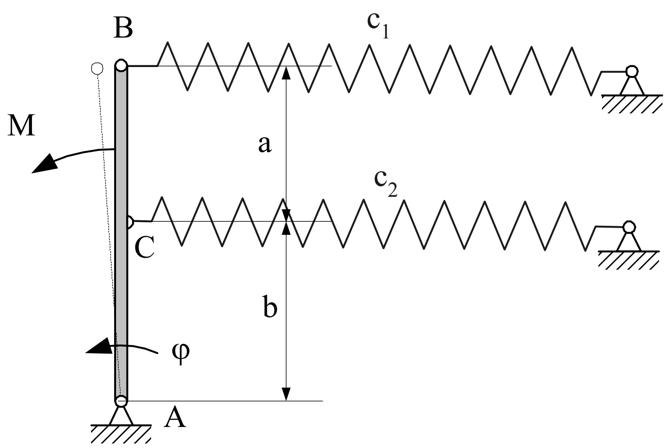
b) Írja fel a tömeg mozgásegyenletét!

$$/ \quad m\ddot{y} + cy = F(t) \quad /$$

---

11. feladat

Az „AB” karhoz egy c_1 és egy c_2 merevségű rugó van rögzítve.



a) Határozza meg a karra ható M nyomaték és a kar φ szögelfordulása közötti összefüggést kis elmozdulásokra! Közelítőleg mekkora a rugók végeinek az elmozdulása?

(Segítség: a feladat bonyolultsága indokolja a free-body diagram megrajzolását!)

$$/ \quad M = [(a+b)^2 c_1 + b^2 c_2]\varphi \quad /$$

----

12. Kidolgozott példa

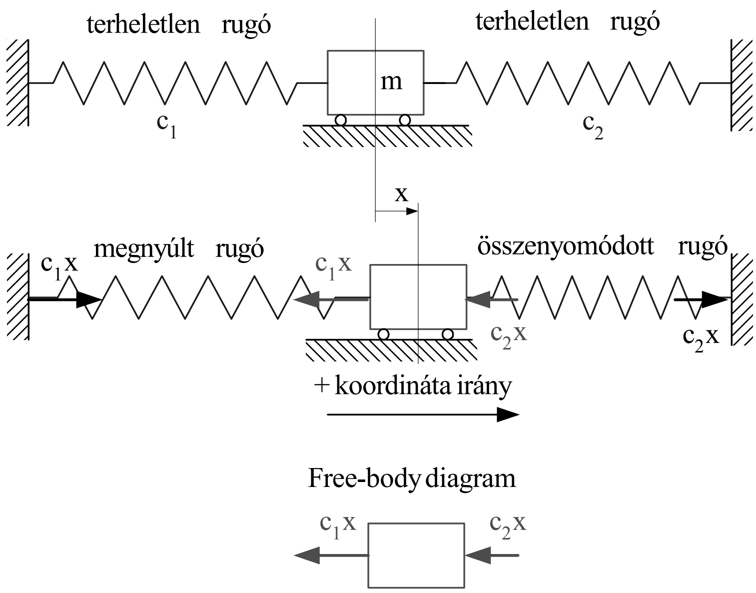
Írja fel az ábrán látható tömeg mozgásegyenletét!

Megoldás

A tömeget x-értékkel kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből. A bal oldali rugó ekkor megnyúlik x-értékkel és c_1x húzóerőt fejt ki a vele érintkező testekre. A tömegre nézve ez balra mutató c_1x erőt jelent.

A jobb oldali rugó ugyanakkor összenyomódik x-értékkel és c_2x nyomóerőt fejt ki a vele érintkező testekre. A tömegre nézve ez balra mutató c_2x erőt jelent.

Megrajzoljuk a vizsgált test free-body diagram ját (erőkkel helyettesítve a vizsgált testtel érintkező más testek hatását).



.Felírva Newton II. axiómáját (a dinamika alapegyenletét haladó mozgásra) nyerjük a tömeg mozgásegyenletét.

$$\sum F = ma$$

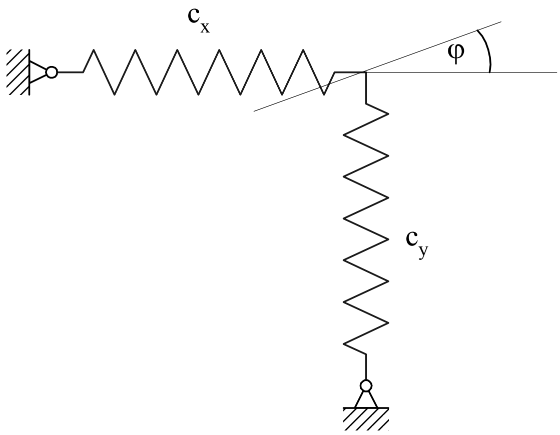
$$-c_1x-c_2x=ma$$

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x = 0$$

----

13. feladat

Egy anizotróp csapágyazás vízszintes irányú rugómerevsége c_x, függőleges irányú rugómerevsége c_y.



Határozza meg a csapágyazás tetszőleges φ irányú rugómerevségét!

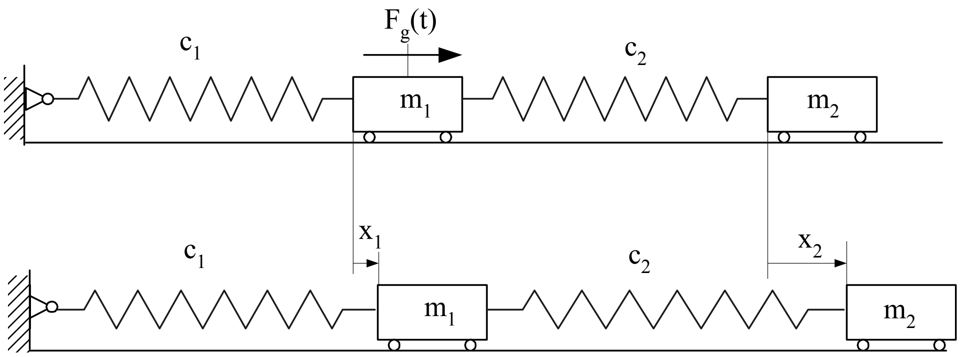
/ $c(\varphi) = c_x \cos^2\varphi + c_y \sin^2\varphi$ /

---

14. feladat

Két tömegből és két rugóból álló mechanikus lengőrendszer látható az ábrán. Az m_1 tömegre gerjesztőerő is hat.

Írja fel az egyes tömegek mozgásegyenleteit!



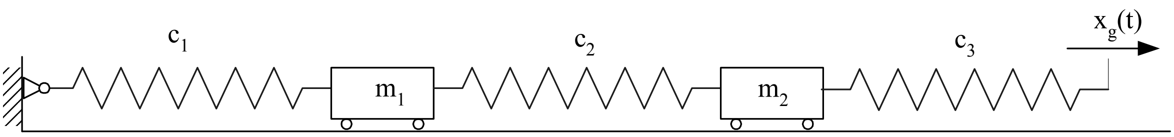
/ $m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = F_g$

$m_2\ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0$ /

---

15. feladat

Az ábrán látható rendszer útgerjesztésű. Írja fel az egyes tömegek mozgásegyenleteit!



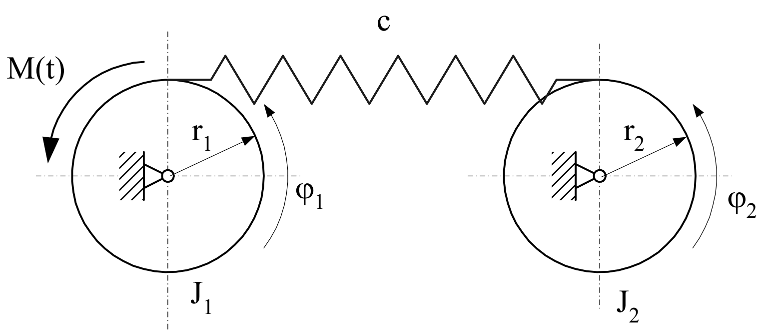
$$/ \;\; m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_3x_g(t) \;\; /$$

---

16. feladat

Az ábrán szíjhajtás modellje látható. A J_1 és J_2 tehetetlenségi nyomatékú szíjtárcsákat a húzott oldalon „c” merevségű szíj kapcsolja össze. A bal oldali szíjtárcsára M(t) nyomatékgerjesztés hat.



a) Írja fel az egyes szíjtárcsák mozgásegyenleteit!

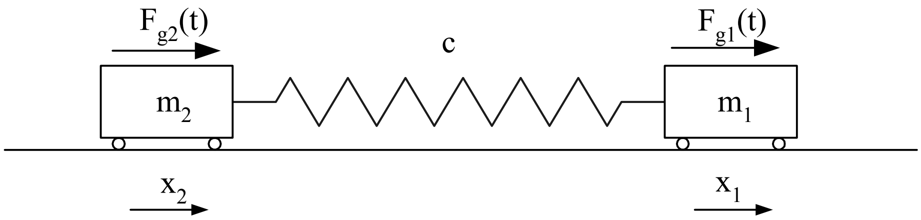
$$/ \;\; J_1\ddot{\varphi}_1 + cr_1^2\varphi_1 - cr_1r_2\varphi_2 = M(t)$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 + cr_2^2\varphi_2 + cr_1r_2\varphi_1 = 0 \;\; /$$

---

17. feladat

Egy autó és pótkocsi modelljét látja az ábrán.



a) Írja fel az autó és a pótkocsi mozgásegyenleteit!

$$/ \;\; m_1\ddot{x}_1 + cx_1 - cx_2 = F_{g1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = F_{g2} \;\; /$$

b) Mekkora a rendszer sajátfrekvenciája?

(Segítség: Gerjesztetlen rendszer esetén vezessen be új változót, $\Delta x = x_1 - x_2$. Ezzel a mozgásegyenlet $\Delta\ddot{x} + (\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2})\Delta x = 0$ lesz. Innen a sajátfrekvencia $\alpha = \sqrt{\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2}}$)