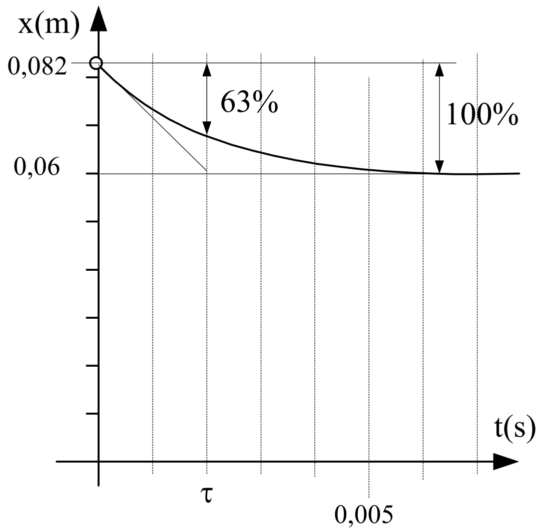
A NÉV:……………………………………….
NEPTUN kód:……………………………..

1) Egy 0,06m hosszú gumit F=1N erővel megnyújtva annak hossza 0,082méterre változott. Az erőt megszüntetve a gumirugó az ábrán látható időfüggvény szerint nyeri vissza eredeti hosszát.

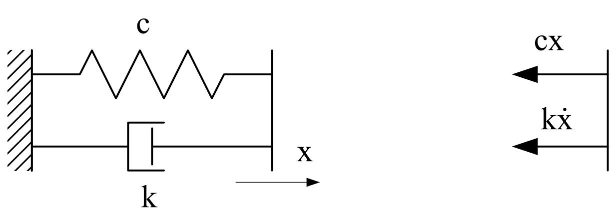
a) Írja fel a magára hagyott rugó x(t) mozgásegyenletét, ha az k csillapítóból és c ideális rugóból áll! (1p)
b) Mekkora a k csillapítási tényező értéke? (2p)



Megoldás
A rugómerevség az adatokból számítható:

$$c = \frac{F}{\Delta x} = \frac{1}{0{,}022} = 45{,}45\,\mathrm{N/m}.$$

Az időállandó a szerkesztésből adódóan τ=0,002s.
A free-body diagram:



A mozgásegyenlet (rendszeregyenlet):
$k\dot{x} + cx = 0$ (nincs tömeg)

A mozgásegyenlet megoldása

$$x(t) = Ke^{-\frac{c}{k}t},$$

ahonnan az időállandó $\tau = \dfrac{k}{c}$
Innen

$$\underline{\underline{k = c \cdot \tau = 45{,}45 \cdot 0{,}002 = 0{,}0909\ \mathrm{Ns/m}.}}$$

1) Hol választ a modellen csomópontot?

Ahol az elemhatáron a keresztváltozó értéke megváltozik

2) Sorolja fel a rendszeregyenlet felírásának ismert módszereit!

Csomóponti, hurok, energia, Newton II ax.

3) Milyen fizikai tulajdonságot fejez ki az inertivitás?

Folyadék tehetetlenség

4) Mi a fizikai jelentése a differenciálegyenlet homogén megoldásának?

Rendszer szabad rezgése, gerjesztés nélkül

5) Írja fel egy t=3s időnél fellépő Dirac-delta matematikai alakját!

$\delta(t-3)$

6) Egy rugót az $F=10^6x^2+200x$ erő-elmozdulás függvény jellemez. Mekkora a rugó differenciális rugómerevsége kis elmozdulásokra?

$c=dF/dx=2*10^6x+200$, x=0 helyen c=200 N/m

7) Milyen szempontok szerint csoportosítjuk a modelleket?

Statikus-dinamikus, lineáris-nemlineáris, koncentrált paraméterű-kontinuum, ….

8)Milyen paraméterek jellemzik a másodrendű rendszereket?

b_0/a_0 statikus erősítés, a csillapítatlan sajátfrekvencia (α), D Lehr-féle csillapítás

9) Mi a különbség a csillapítatlan és a csillapított sajátfrekvencia között?

α: ha a másodrendű rendszerben lévő csillapítást kivennénk, akkor a magára hagyott rendszer ezzel a körfrekvenciával rezegne(fiktív jellemző)

γ: ha a másodrendű rendszerben van csillapítás, akkor ezzel a körfrekvenciával végzi sajátrezgéseit.

10) Mekkora a rugómerevsége tengelyirányban egy *d* átmérőjű, *l* hosszúságú acélrúdnak?

$$AE/l=\frac{d^2\pi E}{4l}$$

11) Bizonyítsa be, hogy a harmonikus rezgőmozgás $x=A\sin\alpha t+B\cos\alpha t$ megoldása felírható $x=K\sin(\alpha t+\varphi)$ alakban is.

$x=A\sin\alpha t+B\cos\alpha t=K\sin\alpha t\cos\varphi+K\cos\alpha t\sin\varphi$

$A=K\cos\varphi$

$B=K\sin\varphi$

12) Mekkora a pillanatnyi x kitérés, ha $x=\mathrm{Im}(5*e^{j2})$

*x=5sin2(rad)=5*0,909=4,545*

Szerezhető pontszám:

8 találat 1p

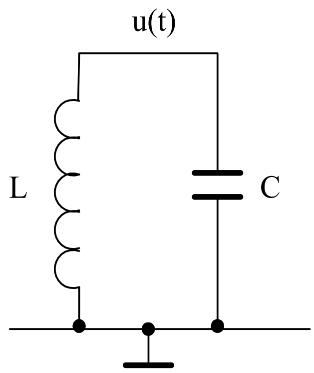
9 találat 2p

10 találat 3 p

11,12 találat 4p

B NÉV:…………………………………

2) Egy L=50mH induktivitású tekercsből és egy C=4,7 μF kapacitású kondenzátorból álló áramkör kondenzátorát u=5V feszültségre feltöltjük, majd magára hagyjuk. Határozza meg az u(t) feszültség időbeli változását, ha induláskor du/dt=0! (3 p)



Megoldás

A csomóponti törvény alapján $i_L+i_c=0$

$$C\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}\int udt=0$$

Deriválás és rendezés után

$$\ddot{u}+\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\alpha^2}u=0 \quad \alpha=2062\,rad/s$$

Ez a harmonikus rezgőmozgás (középiskola!) differenciálegyenlete, melynek megoldása $u(t)=K\sin(\alpha t+\varphi)$ alakú.

A kezdeti feltételekből

$5=K\sin\varphi$

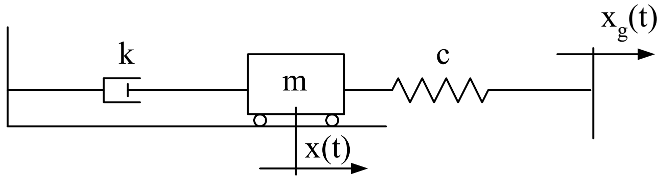
$$0=K\alpha\cos\varphi\rightarrow\cos\varphi=0\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

A két egyenletből K=5.

A megoldás:

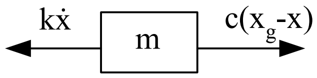
$$\underline{\underline{u(t)=5\sin(2062t+\frac{\pi}{2})=5\cos(2062t)}}$$

3) Az ábrán látható mechanikus rendszer rugójának végét $x_g(t)=0{,}01\cdot 1(t)$ [m] mozgástörvény szerint mozgatjuk.
a) Írja fel a rendszeregyenletet, ha a bemenet $x_g(t)$, a kimenet $x(t)$.
b) Határozza meg a tömegpont mozgásának $x(t)$ időfüggvényét, ha m=2kg,
c=20000N/m, k=80Ns/m! (5p)



Megoldás

A free-body diagram



Newton II axiómáját alkalmazva a mozgásegyenlet normalizált alakban:

$$\ddot{x}+\underbrace{\frac{k}{m}}_{2D\alpha}\dot{x}+\underbrace{\frac{c}{m}}_{\alpha^2}x=\frac{c}{m}x_g$$

Innen $\alpha=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{20000}{2}}=100\,\mathrm{rad/s}$ (csillapítatlan saját-körfrekvencia)

$2D\alpha=\frac{k}{m}\rightarrow D=0{,}2$ (Lehr-féle csillapítás)

Amivel

$\beta=\alpha D=100\cdot 0{,}2=20\,\mathrm{rad/s}$ (csillapodás exponenciális kitevője)

$\gamma=\alpha\sqrt{1-D^2}=100\sqrt{1-0{,}2^2}=97{,}97\,\mathrm{rad/s}$ (csillapított /tényleges/ saját-körfrekvencia)

A homogén egyenlet megoldása másodrendű lengőképes (D<1) rendszerre
$x_h=Ke^{-\beta t}\sin(\gamma t+\varphi)$ alakú. (Ezt fejből kell tudni)

A partikuláris (állandósult) megoldást x_p=B (állandó) alakban keressük, mivel a gerjesztés is állandó.
A differenciálegyenletbe való visszahelyettesítés után $x_p=0{,}01$ adódik, mivel $\dot{x}_p=\ddot{x}_p=0$.
Az általános megoldás $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

$$x(t)=Ke^{-\beta t}\sin(\gamma t+\varphi)+0{,}01$$

Az ismeretlenek (K,φ) a kezdeti feltételekből határozhatók meg:
$0=K\sin\varphi+0{,}01$
illetve
$0=-\beta K\sin\varphi+K\gamma\cos\varphi$.
A két egyenletből K=0,010206 és φ=-101,53fok=-1,77rad (a szög a 3. síknegyedben van)
Az általános (teljes) megoldás ugrásfüggvényre szuperponált csillapodó harmonikus mozgás:

$$\underline{\underline{x(t)=0{,}010206e^{-20t}\sin(97{,}97t-1{,}77)+0{,}01}}\ \mathrm{[m]}$$