

Fogaskerék alapismeretek

Alapfogalmak:

Fogsám (z)

A fogaskerék területén levő fogak száma. Egész szám.

Modul (m)

Az osztókör átmérője és a fogsám hányadosa. Egyszerűbben: a fog magasságával, méretével arányos érték, mely szabványosítva van. Például egy $m=3$ mm modulal készült fogaskerék fogának magassága közelítőleg $h=2m=6$ mm. Csak azonos modulú fogaskerek tudnak egymással kapcsolódni.

Osztókör (d_0)

Elemi és kompenzált fogazat esetén azonos a gördülőkörrel. A fogaskerék hajtás áttételét az osztókörök átmérőinek viszonya határozza meg, mintha ilyen átmérőjű hengerek gördülnének le egymáson csúszás nélkül. Nem mérhető méret. Számítása: $d_0=m \cdot z$

Fejkör (d_f)

Mivel a fog fejmagassága modulnyi, ezért a fejkör átmérője $2m$ modulal nagyobb az osztókör átmérőjénél. Számítása: $d_f=m(z+2)$

Alapkör (d_b)

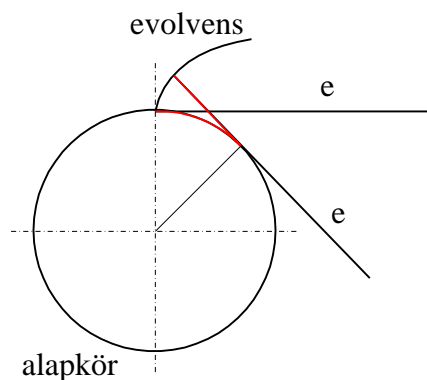
Elvi, nem mérhető kör. A fogprofil generálásában van szerepe. Az evolvens fogprofil generáló egyenese ezen a körön gördül le. Számítása: $d_b=mz \cos \alpha$

Alapprofilszög (α_0)

A fogprofil generáló fésűskés oldalának hajlásszöge. A kapcsolóvonal vízszintessel bezárt szöge. Általában 20 fok.

Evolvens fogprofil

Származtatása: egyenes az alapkörön gördül le. Az e egyenes minden pontja evolvenst ír le.



Fogaskerék áttétel

Jele i . A hajtott kerék fogszáma osztva a hajtó kerék fogszámaival. $i=z_2/z_1$

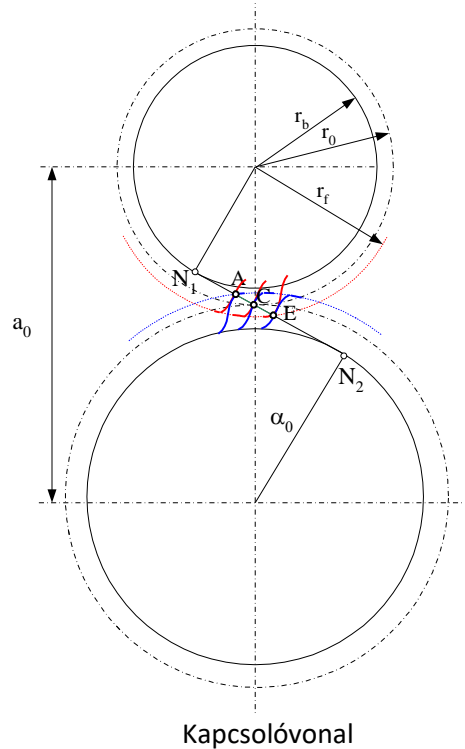
Kapcsolóvonal

Az egymással kapcsolódó fogak érintkezési pontjai ezen egyenes mentén érintkeznek egymással, amíg kapcsolatban vannak. Az alapkörök közös N_1N_2 érintőjének a fejkörök által határolt AE szakasza. Az alsó kerék feje az A pontban lép kapcsolatba és a lába az E pontban lép ki a kapcsolódásból.

Nevezetes pontok a kapcsolóvonalon

A és E pont: a kapcsolóvonal és a fejkörök metszéspontja. Itt lép be a kapcsolódásba, illetve ki a kapcsolódásból a fog.

C: főpont. Az osztóköri körök (gördülő körök, a kapcsolóvonal és a középpontokat összekötő vonalak közös pontja).



Kapcsolószám

A kapcsolódás során vagy egy, vagy két fogpár kapcsolódik egymással. A hajtás folytonossága érdekében egy fogpár addig nem léphet ki a kapcsolatból, amíg egy másik be nem lép. Ezért egy ideig két fogpár van kapcsolatban. A kapcsolatban lévő fogpárok átlagos értéke tehát egynél nagyobb, pl. 1,2. Számítása: $\varepsilon = AE/p_b$

Osztás (p)

Az osztóköri két szomszédos fog azonos pontjának távolsága. Számítása: $p = m\pi$. A fog vastagsága az osztás fele: $s = p/2$

Alaposztás (p_b)

Az alapkörön, vagy a kapcsolóvonalon mért osztás. Számítása: $p_b = m\pi \cos \alpha$

Foghézag

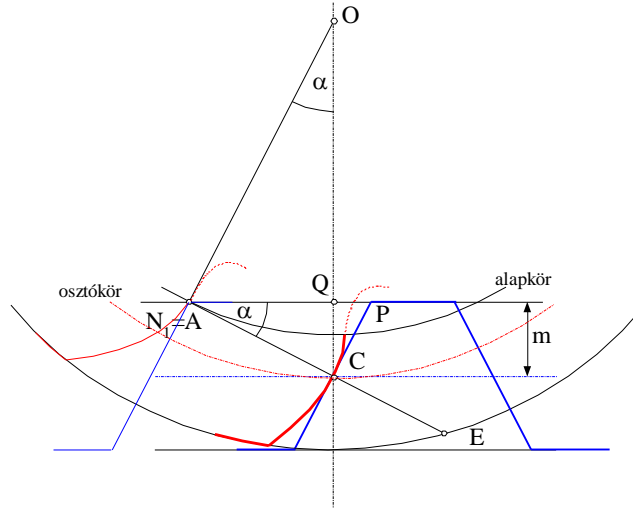
Az érintkező fogak között minimális hézagot kell biztosítani egyrészt a gyártási pontatlanságokból és a hőtágulásból adódó befeszülés érdekében, valamint a kenőanyag számára szükséges rés biztosítása miatt. Túl nagy nem lehet, mert irányváltáskor kopogást (holtjátékot) okoz.

Profileltolás (mx)

Kompenzált fogazatnál a kiskeréknél a szerszám $+mx$ értékkel sugárirányban ki van húzva, a nagykeréken ugyanennyivel be van tolvá a középpont irányába. Hatására módosul a fog alakja és fejkör átmérője, de a gördülő körök és a tengelytáv változatlan marad. Előnye, hogy a fogak csúszása kiegyenlíthető a kis és nagykeréken, illetve 17 fognál kisebb fogszám is kialakítható alámetszés nélkül. A megváltozott fejkör átmérők számítása: $d_{f1} = m(z_1 + 2) + 2mx$; $d_{f2} = m(z_2 + 2) - 2mx$.

Határkerék fogszáma

Elemi fogazat esetén meghatározható az a minimális fogszám, ami még helyes kapcsolódást biztosít. Tekintsük egy fogaskerék kapcsolatát egy fogasléccel. Mivel az evolvens fogprofil az alapkörből indul, ezért a fogasléc (fésűkés szerszám) fejevonala legfeljebb éppen átmehet az N_1 ponton. Ha beljebb haladna, akkor a szerszám P csúcspontja a már elkészült evolvens darabba belemunkálna, ún. *alámetszést* okozna.



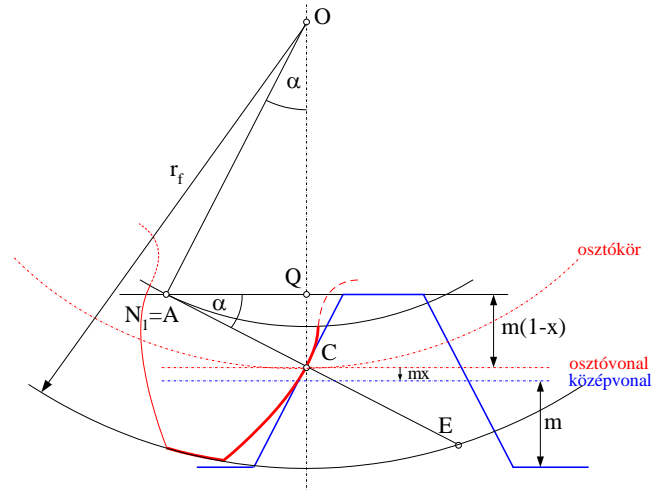
Az ábra OAC és QAC háromszögei hasonlók. A hasonlóságot felírva

$$\frac{OC}{AC} = \frac{AC}{QC}$$

A távolságokat a fogszámmal és a modullal kifejezve, 20 fokos szokásos kapcsolószöggel a határfogszám=17:

$$\frac{\frac{mz_0}{2}}{\frac{mz_0}{2} \sin \alpha} = \frac{\frac{mz_0}{2} \sin \alpha}{m} \rightarrow z_0 = \frac{2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 20^\circ} = 17$$

Elemi fogazattal tehát nem lehet 17 fognál kevesebbet megvalósítani. Ha a keréken pozitív $+mx$ profileltolást alkalmazunk (a fogasléc középvonalát mx értékkel elmozdítjuk az osztókörhöz képest),



akkor a levezetésben $QC=m(1-x)$ értéket helyettesítve,

$$\frac{\frac{mz_x}{2}}{\frac{mz_x}{2} \sin \alpha} = \frac{\frac{mz_x}{2} \sin \alpha}{m(1-x)} \rightarrow z_x = \frac{2(1-x)}{\sin^2 \alpha}$$

láthatóan kisebb z_x fogszám is megvalósítható. Adott z_x fogszámhoz szükséges profileltolás tényező

$$x = \frac{z_0 - z_x}{z_0}$$

összefüggéssel számítható.

Például, ha $z_x=12$ fogszámú fogaskereket szeretnénk készíteni, akkor

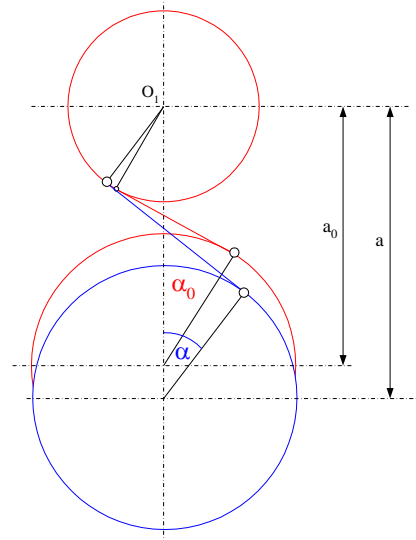
$$x = \frac{17 - 12}{17} = 0,294$$

pozitív profileltolás tényező szükséges. Kompenzált fogazatnál a nagyobb fogszámú keréken ugyanekkora, de ellenkező előjelű profileltolást kell alkalmazni.

Tengelytáv

A gördülőkör sugarak összege. Számítása: $a_0 = m(z_1 + z_2)/2$. A tengelytáv elméletileg nem lehet akármekkora, mivel z -k egész számok. Ha tetszőleges (vagy szabványos) tengelytávot kell biztosítani, akkor **általános fogazatot** kell alkalmazni (az egyes keréken eltérő mértékű profileltolással). Az evolvens fogprofil előnyös tulajdonsága, hogy kissé pontatlan tengelytávnál is hibátlanul működik, csak kissé megváltozik a kapcsolószög:

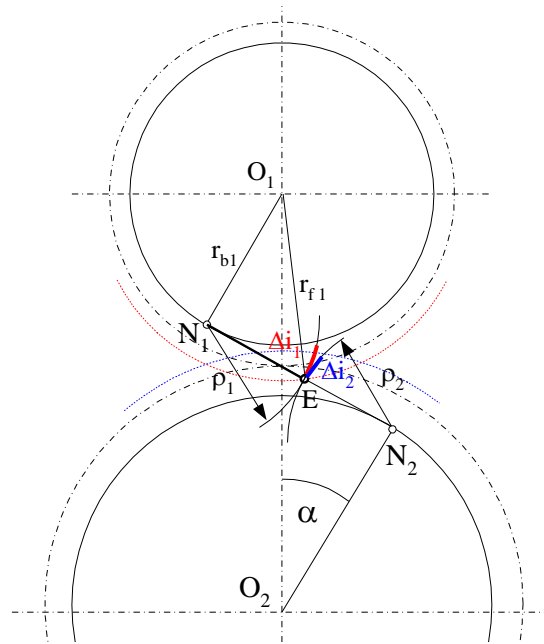
$$r_{b1} + r_{b2}: \quad a_0 \cdot \cos \alpha_0 = a \cdot \cos \alpha$$



Kapcsolószög változása

Csúszás

A fogak nem tisztán gördülnek, hanem csúsznak is egymáson. A csúszást a kapcsolóvonal E pontjában mutatjuk be.



Az érintkező fogak görbületi sugarai az E pontban ρ_1 és ρ_2 . Az O_1N_1B derékszögű háromszögből a ρ_1 görbületi sugár

$$\rho_1 = \sqrt{r_{f1}^2 - r_{b1}^2} = \frac{m}{2} \sqrt{(z_1 + 2)^2 - (z_1 \cos \alpha)^2}$$

Hasonlóan az O_2N_2B háromszögből

$$\rho_2 = \sqrt{r_{f2}^2 - r_{b2}^2} = \frac{m}{2} \sqrt{(z_2 + 2)^2 - (z_2 \cos \alpha)^2}$$

Egy rövid Δt idő alatt a kiskeréken $\Delta i_1 = r_1 \Delta \varphi_1$ ívhossz, a nagykeréken $\Delta i_2 = r_2 \Delta \varphi_2$ ívhossz gördül le. Az áttétel értelmében a kerek elfordulási szögének aránya $\Delta \varphi_2 = \Delta \varphi_1 z_1 / z_2$, ezzel $\Delta i_2 = r_2 \Delta \varphi_1 z_1 / z_2$ lesz. A relatív csúszás az E pontban

$$\eta_E = \frac{\Delta i_1 - \Delta i_2}{\Delta i_2} = \frac{\rho_1 \Delta \varphi_1 - \rho_2 \Delta \varphi_1 \frac{z_1}{z_2}}{\rho_2 \Delta \varphi_1 \frac{z_1}{z_2}} = \frac{\rho_1 z_2 - \rho_2 z_1}{\rho_2 z_1}$$

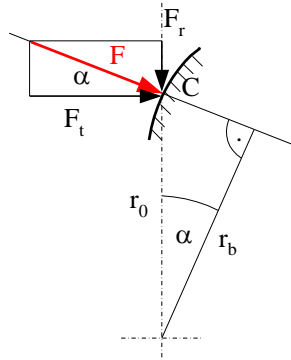
Hasonlóan számítható a relatív csúszás az A pontban is. A két csúszás általában különbözik egymástól. Profileltolással a fogak alakja, a fejkörök átmérője és így a végpontokban a görbületi sugarak is módosíthatók. Így elérhető, hogy a relatív csúszás (és ezzel a kopás) a végpontokban azonos legyen.

Foglenyesés

Nagy terhelésű hajtásokban a fogak deformációja miatt a hajtó kerék terhelt foga kissé hátra hajlik, a hajtott kerék foga előre hajlik. Ezért az újonnan kapcsolatba lévő fogak az osztás egyenetlensége miatt ütközéssel lépnek kapcsolatba, ami a fogfrekvencián jelentős gerjesztést (rezgést, zajt) okoz. Megoldást jelent, ha a fogak fejrészén a fog vastagságát csökkentik, például köszörüléssel.

Fogeroő

Egyenes fogazat esetén a fogak között átadódó F erő F_t érintő- és F_r sugárirányú komponensekre bontható.

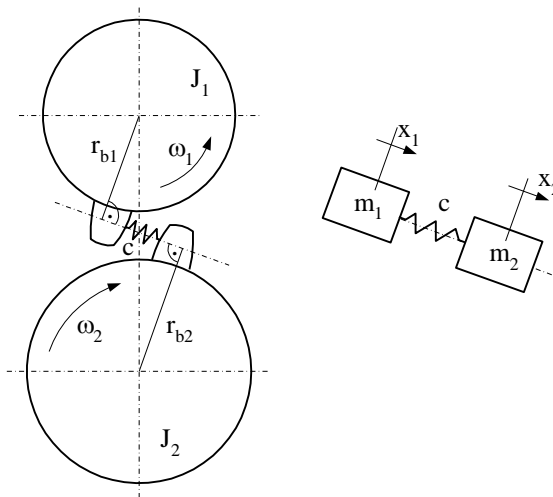


Fogaskerék dinamika

Hagyományos esetben a fogaskerék-hajtás mint lengőrendszer egyetlen sajátfrekvenciával rendelkezik, ha a csapágyak rugalmasságától eltekintünk. A fogaskerekek fogai nem tökéletesen merevek, egy fogpár eredő rugómerevsége legyen „c”. A forgó tömegeket helyettesíthetjük haladó mozgást végző redukált tömegükkel:

$$m_1 = J_1 / r_{b1}^2 \text{ és } m_2 = J_2 / r_{b2}^2$$

A tömeg-rugó rendszer lengésekre képes, melynek sajátfrekvenciáját egyszerűen lehet meghatározni.



Az egyes tömegekre felírhatjuk a $\Sigma F = ma$ mozgásegyenleteket:

$$-c(x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1 \rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{c}{m_1} x_1 + \frac{c}{m_2} x_2$$

$$c(x_1 - x_2) = m_2 \ddot{x}_2 \rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{c}{m_1} x_1 - \frac{c}{m_2} x_2$$

A deriváltak különbségét képezve

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\left(\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2}\right)(x_1 - x_2)$$

Rendezés után

$$(x_1 - x_2) \ddot{} + \left(\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2}\right)(x_1 - x_2) = 0$$

Bevezetve a tömegek $\Delta x = x_1 - x_2$ relatív elmozdulását (a fogrugó hosszváltozását)

$$\Delta \ddot{x} + \alpha^2 \Delta x = 0$$

a harmonikus rezgőmozgás közismert differenciálegyenletét kapjuk

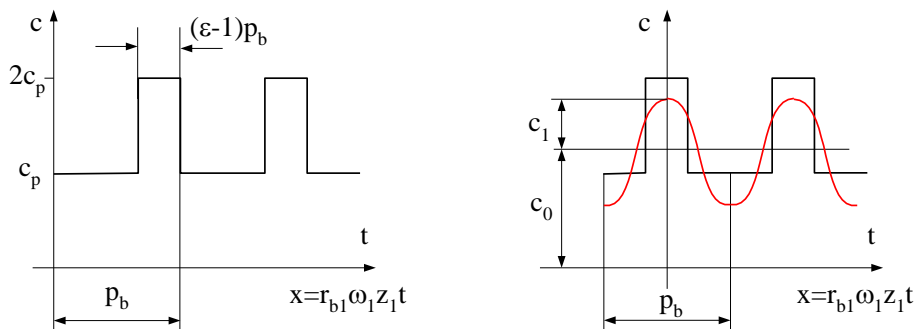
$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{c}{m_1 m_2 / (m_1 + m_2)}}$$

(rad/s) sajátfrekvenciával (körfrekvenciával). Ha a rendszert külső gerjesztések is érik (ingadozik a hajtó, vagy a terhelő nyomaték), és azok ω frekvenciája α_0 közelébe esik, akkor rezonancia állhat elő. Megnövekszik a rezgés, zaj, akár tönkremenetel is bekövetkezhet. Hogy ez ritkán áll elő, annak az oka, hogy a sajátfrekvencia általában igen nagy, a gerjesztések frekvenciája jóval alatta marad.

Fogaskerék-hajtás parametrikus gerjesztése

Különösen nagyobb fordulatszámon működő fogaskerekeknél (mint a villamos autók motorjai) olyan lengésjelenségek jöhetnek létre, mellyel a szokásos fordulatszámokon üzemelő hajtásoknál nem találkozunk.

Utóbbi idők kutatásai során figyelembe vették, hogy a fogrugó merevsége nem állandó. A kapcsolódás során ugyanis vagy egy fogpár, vagy két fogpár kapcsolódik egymással. Ez a periodikus jelenség önmagában is gerjesztést jelent (ún. parametrikus gerjesztés), függetlenül attól, hogy van-e vagy nincs külső gerjesztés. A fogazat merevsége az ábrán látotthoz hasonlóan alakul:



A fogmerevség periodikusan váltakozik. Amennyiben idő függvényként szeretnénk leírni a fogmerevség változását, annak frekvenciája $\omega_z = \omega_1 z_1$, mivel minden fog belépése a kapcsolódásba újabb periódust indít (ez az ω_z fogfrekvencia)

Periodikus függvényeket *Fourier*-sorokkal lehet megadni. Páros függvény esetén a *Fourier*-sor alakja:

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_z t) + c_2 \cos(2\omega_z t) + \dots + c_n \cos(n\omega_z t) + \dots$$

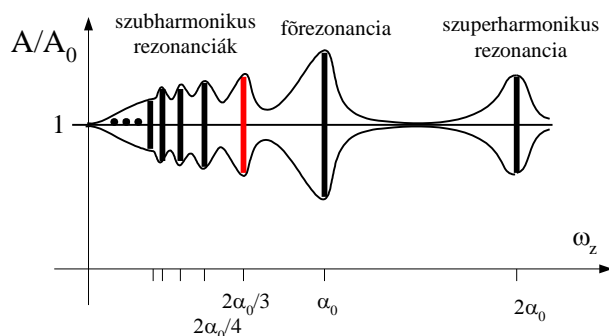
Itt c_0 a függvény középértéke (integrálközepe: függvény alatti terület osztva a szélességgel), a c_i együtthatók a felharmonikusok amplitúdói. Minél több tagot veszünk figyelembe, a függvény közelítése annál pontosabb. Egyszerűség kedvéért a *Fourier*-sornak csak az első két tagját vegyük figyelembe és helyettesítsük a mozgásegyenletbe:

$$\Delta \ddot{x} + (c_0 + c_1 \cos \omega_z t) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \Delta x = 0$$

A *Mathieu*-féle periodikus együtthatós, nemlineáris differenciálegyenlet megoldása bonyolult, nekünk elegendő meghatározni a rendszer sajátfrekvenciáit. A megoldás meglepő eredménye, hogy a rendszernek nem csupán egyetlen sajátfrekvenciája van, hanem végtelen sok. Az n -dik sajátfrekvencia az α_0 főrezonancia-frekvencia duplájának (a szuperharmonikus frekvenciának) az n -ed része:

$$\alpha_n = 2\alpha_0/n$$

Ezek a frekvenciák még külső gerjesztés nélkül is -a belső paraméterek (fogmerevség, csillapítás) periodikus változása miatt- megnő a rezgésamplitúdó. Az amplitúdó növekedés mértéke numerikus szimulációval elég könnyen meghatározható, értéke nagyban függ a kapcsolószámtól, a rendszer csillapításától (anyag belső súrlódása, folyadékfilm csillapítása a fogak között, súrlódás a fogak között, csapágy súrlódás, légellenállás), a mindig meglévő foghézagtól. Az eredmény pontossága nagyban függ a fogmerevség változását leíró Fourier-sor figyelembe vett tagjainak számától. Jellegre helyesen az ábra mutatja a rezonanciahelyeket és az A rezgésamplitúdó egy lehetséges eloszlását



Például ha a fogrugó átlagos fogmerevsége $c_0=10^9$ N/m, a fogaskerek tehetetlenségi nyomatékai $J_1=0,0009$ kgm^2 és $J_2=0,0144$ kgm^2 , az alapkör sugarak $r_{b1}=0,03$ m és $r_{b2}=0,06$ m, a hajtó kerék szögsebessége $\omega_1=1400$ rad/s és fogszáma $z_1=17$, akkor a főrezonancia körfrekvenciája

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{c}{m_1 m_2 / (m_1 + m_2)}} = 35355 \text{ rad/s}$$

További rezonanciák várhatók a következő frekvenciákon: $\alpha_n=2\alpha_0/n=70710, 35355, 23570, 17677, 14142, \dots$ (rad/s) .

A gerjesztés frekvenciája (a fogfrekvencia)

$$\omega_z = \omega_1 z_1 = 23800 \text{ rad/s.}$$

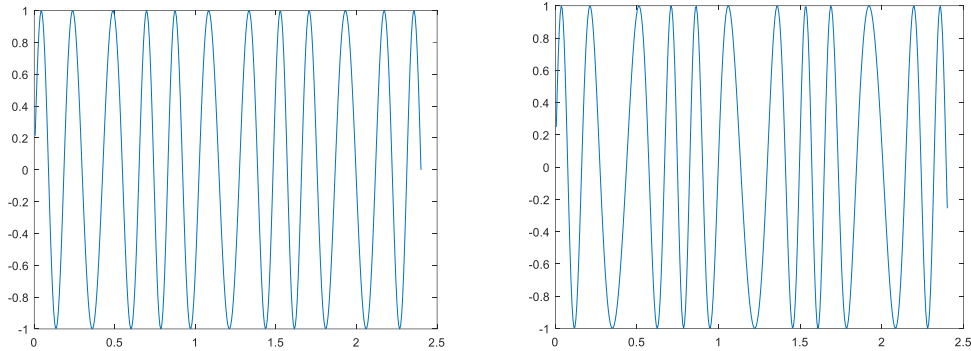
Látható, hogy a gerjesztés frekvenciája szinte egybeesik az egyik szubharmonikus frekvenciával, ahol az ábra szerint meglehetősen nagy rezgésnövekedés, (és zaj) lép fel. A kedvezőtlen hatást többféleképpen lehet elkerülni: gyors áthaladás a rezonancia frekvencián, a sajátfrekvencia elhangolása (tömeg, merevség, fogszám változtatása), a csillapítás növelése, nemlinearitás (pl. foghézag) növelése. Ferde fogazat alkalmazása is javítja a helyzetet, mivel ott a fogmerevség változása sokkal kisebb.

Frekvencia moduláció

A fogfrekvencia nem feltétlenül állandó, hanem ingadozhat az átlagos ω_c carrier (vivő) frekvencia (pl. a motor átlagos szögsebessége) körül ω_m modulációs frekvenciával (például a tengely torziós rezgéseinek a frekvenciája). A jelenség bekövetkezhet például a kiegyensúlyozatlan tömegek (forgattyús hajtómű), vagy az időben periodikusan ingadozó külső terhelések következtében is. A jelenség a frekvencia moduláció, mely a híradástechnikából jól ismert (FM rádió vétel). Az

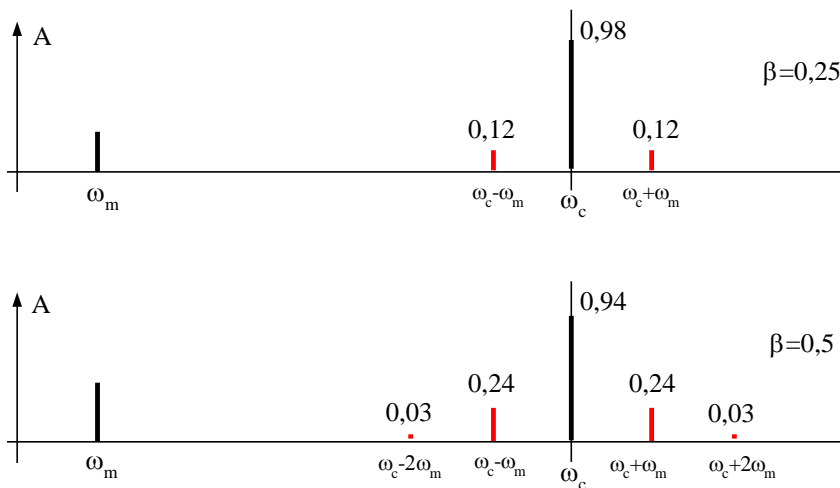
$$\omega_z(t) = \sin(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)$$

eredő rezgés képe látható az alsó ábrán $\beta=0,75$ és $\beta=1,5$ modulációs index, valamint $\omega_c=30$ rad/s vivőfrekvencia és $\omega_m=8$ rad/s modulációs frekvencia esetén (Matlab szimuláció). Nagyobb modulációs indexnél a frekvencia ingadozás (a sűrűsödés és ritkulás) erőteljesebb.



Frekvencia moduláció (FM) $\beta=0,75$ és $\beta=1,5$ modulációs index esetén.

A modulációs index nagyságától függően egy vagy több oldalsáv jelenik meg az FFT (Fast Fourier Transform) frekvencia-spektrumban. Első fajú *Bessel*-függvényekkel kimutatható, hogy nem csupán ω_c és ω_m frekvenciájú rezgések keletkeznek, hanem $(\omega_c+\omega_m)$, $(\omega_c-\omega_m)$, $(\omega_c+2\omega_m)$, $(\omega_c-2\omega_m)$,.....frekvenciájú és változatos amplitúdójú rezgések is! A kialakuló rezgések spektrumi az ábrán láthatók $\beta=0,25$ és $0,5$ modulációs index esetén.

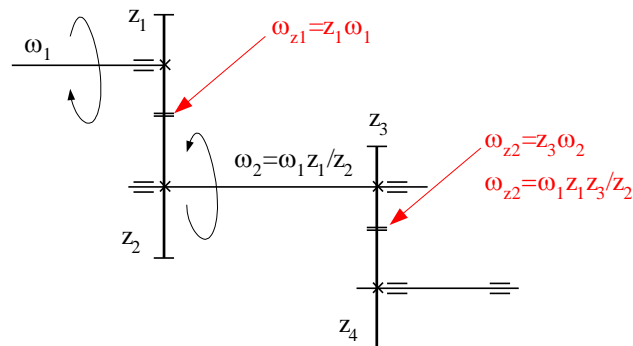


Oldalsávok a frekvencia spektrumban

Ha egy fogaskerékajtás rezgés-, vagy zajviszonyain kell javítani, akkor a rezgés (zaj) spektrumát frekvencia analízátorral lehet vizsgálni és a kiugróan magas amplitúdók okozóját azonosítani. A műszer a jel *Fourier*-transzformáltját (FFT) számítja, ami a felhasználó számára megmutatja, hogy mekkora a rezgésamplitúdó az egyes frekvenciákon. Az előbbieken megismert frekvencia moduláció jelensége sajnos megnehezíti a spektrum kiértékelését, mivel azon nem csupán a fogfrekvenciák, hanem sok kombinációs (oldalsávi) frekvencia is megjelenik, bár azok amplitúdója kisebb. Ezen kívül a

spektrumban torziós és hajlítási rezgések, csapágyak okozta rezgések, stb. és azok kombinációs frekvenciái is megjelennek. A spektrumban előforduló fogfrekvenciák felismerését segíti a következő megfontolás:

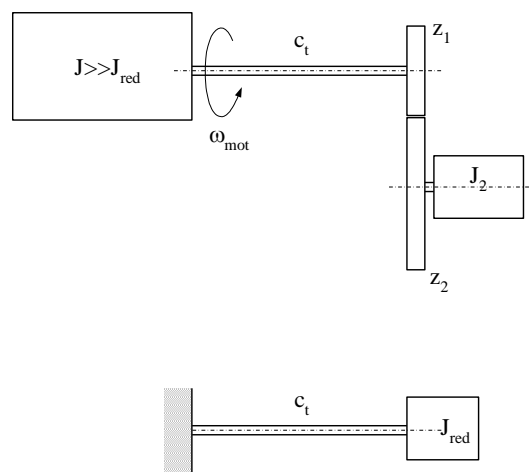
Vizsgáljuk egy kétfokozatú hajtómű fogfrekvenciáit az ábra szerint!



Az ábra alapján az ω_{z1} és ω_{z2} fogfrekvenciák egyszerűen számíthatók és a spektrumban azonosíthatók. Kiugróan nagy amplitúdó esetén annak a fogaskerékkapcsolatnak a hibáit kell elsősorban keresni (profilhiba, osztáshiba, többfogmért ingadozás, radiális ütés, sorja, fogbelépés-foglenyesés nélkül, súrlódó erő irányváltása a főpontban, stb.) A középső tengely rugalmassága miatt itt is felléphetnek további kombinációs frekvenciák.

Illusztratív példa

Adott egy végtelen nagy tehetetlenségi nyomatékú, $\omega_{\text{mot}}=300$ rad/s szögsebességgel forgó motor, melyhez $c_t=1256$ Nm/rad torziós rugómerevségű tengely csatlakozik. A tengely végén elhanyagolható tömegű, $z_1=20$ fogszerű fogaskerék van, mely $z_2=40$ fogszerű fogaskeréssel kapcsolódik. A hajtott fogaskerékhez mereven kapcsolódik egy $J_2=3$ kgm² tehetetlenségi nyomatékú tárcsa. Határozzuk meg azokat a frekvenciákat, ahol rezgések kialakulására számíthatunk. (kis frekvenciák, vagy ferde fogazat esetén eltekinthetünk a parametrikus rezgésektől)



Először a tárcsát áthelyezzük a tengely végére. Mint ismeretes, a tehetetlenségi nyomatékokat az áttétel négyzetével lehet redukálni másik tengelyre.

$$J_{\text{red}} = \frac{J_2}{i^2} = \frac{3}{2^2} = 0.75 \text{ kgm}^2$$

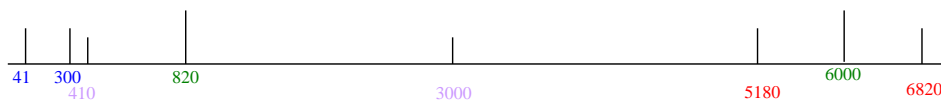
A tengely $d=20$ mm átmérőjű, $l=1$ m hosszú, anyagának csúsztató rugalmassági modulusza $G=8 \cdot 10^4$ N/mm². A tengely torziós rugómerevsége

$$c_t = \frac{I_p G}{l} = \frac{\frac{20^4 \pi}{32} \cdot 8 \cdot 10^4}{1000} = 1,256 \cdot 10^6 \text{ Nmm / rad} = 1256 \text{ Nm / rad}$$

A tömegből és rugóból álló lengőrendszer torziós sajátfrekvenciája (harmonikus rezgőmozgás):

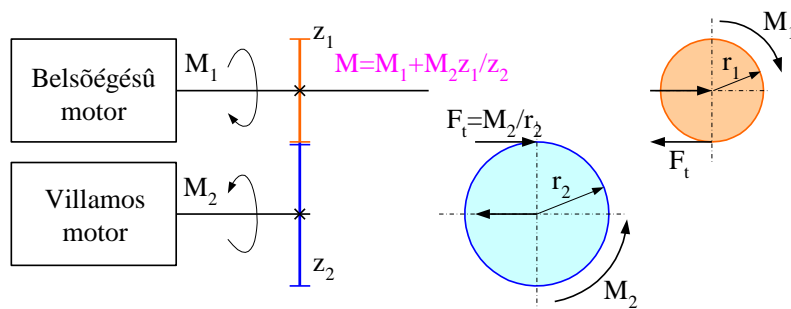
$$\alpha = \sqrt{\frac{c_t}{J_{\text{red}}}} = \sqrt{\frac{1256}{0,75}} = 40,9 \text{ rad/s}$$

Ez az α frekvencia modulálja az ω_{mot} frekvenciát (a hajtó fogaskerék nem teljesen egyenletesen forog, hanem szögsebessége kissé ingadozik, mivel a hosszú tengely torziós lengéseket végez). Ha excentricitás és/vagy kiegyensúlyozatlanság is van, akkor **ezek a frekvenciák** is megjelennek a spektrumban. Mivel minden fogbelépés gerjesztésként hat, **ezen frekvenciák z_1 -szerese (mint fogfrekvencia)** is megjelenik a spektrumban. A modulációs index értékét nem ismerjük (nem tudjuk a tengely lengésamplitúdóját), de értékétől függően **oldalsávok** is megjelenhetnek. Továbbá, mivel a hajtott kerék fele akkora fordulatszámmal forog, mint a hajtó kerék, **ennek frekvenciái** is jelen lehetnek a spektrumban. Mint a példa mutatja, még ilyen egyszerű esetben is sok frekvenciát tartalmaz az FFT spektrum.



Nyomatékösszegző

Hibrid hajtásnál a belsőégésű motor és a villanymotor nyomatékát összegezni kell, ha a menetdinamika azt igényli. Számos megoldás közül az egyszerű fogaskerék áttétellel megvalósított nyomatékösszegzőt mutatjuk be. Az ábrán megrajoltuk a fogaskerek free-body diagramjait. A fogerőnek csak az érintő irányú komponensét ábrázoltuk.



Amennyiben a fogaskerek fogszáma megegyezik ($z_1=z_2$), a két motor nyomatéka egyszerűen összeadódik ($M=M_1+M_2$), miközben a motorok fordulatszáma azonos. Ha a villanymotor kis fordulatszámon kifejtett nagyobb nyomatékát szeretnénk kihasználni, akkor $z_2>z_1$ választás kedvezőbb lehet, ugyanakkor a villanymotor nyomatékából csak $M_2 z_1 / z_2$ jut a kimenetre.

