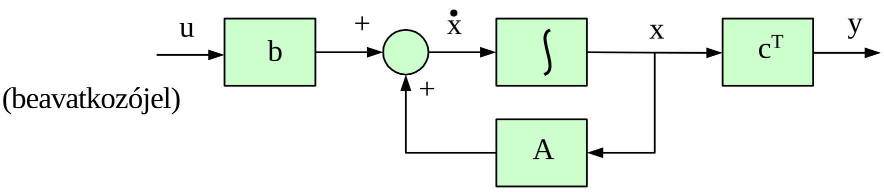
1. ÁLLAPOTTÉR MODELL (ÁTM)

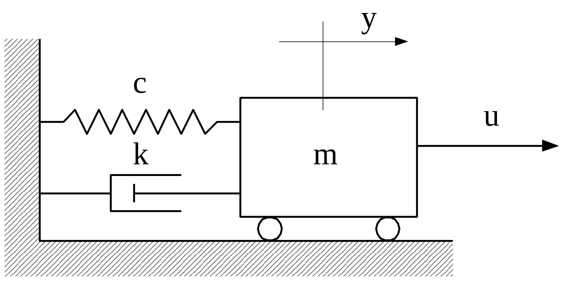
Egy rendszer lineáris (vagy linearizált) állapottér-modelljét (ÁTM) az alábbi alakban keressük, ahol **A** a rendszer struktúrját leíró rendszermátrix, **b** a bemeneti mátrix(vektor), $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}$ a kimeneti vektor:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathrm{u}$$
$$\mathrm{y} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}$$

itt **x** az n-dimenziós állapotvektor, „u” a bemenőjel, „y” a kimenőjel. A módszer egy n-ed rendű differenciálegyenletet n darab elsőrendű differenciálegyenletre vezet vissza. További előnye, hogy MIMO rendszerek leírására is alkalmas. Alapvetően nem kimenet/bemenet (átviteli függvény) jellegű rendszerleírást alkalmaz, hanem a rendszer belső jeleinek (az állapotvektor komponenseinek) dinamikáját vizsgálja. Az ÁTM a korszerű irányításelmélet alapja. Alkalmazásával olyan bonyolult, vagy labilis rendszerek irányítása is lehetővé válik, melyeket a klasszikus irányítási módszerekkel nem lehet megoldani. Az ábrán egy rendszer (process, plant) állapottér-modelljének blokkdiagramja látható.



1. Példa
Erővel (u=f) gerjesztett tömeg, rugó, csillapító rendszer. Írjuk fel a rendszer állapottér-modelljét! Keresett a tömeg „y” kitérése.



A rendszeregyenlet

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = u$$

Célszerűen a legmagasabb deriváltra rendezzük

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}\dot{y} - \frac{c}{m}y + \frac{1}{m}u$$

Legyenek az állapotvektor komponensei $x_1 = \dot{y}$ és $x_2 = y$

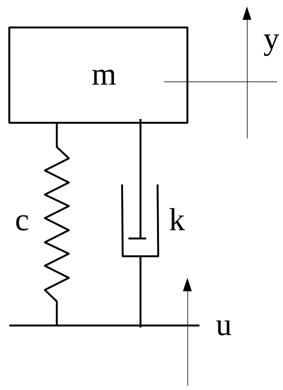
Az ÁTM mátrixait a mátrix-vektor szorzás szabályának figyelembe vételével, a rendezett rendszeregyenlet alapján töltjük ki. A második egyenlet azt fejezi ki, hogy az állapotvektor elemei között differenciál kapcsolat van. Így lehetséges a másodrendű differenciálegyenletet két elsőrendű differenciál-egyenletre felbontani.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\\ \\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ \\ x_2\end{bmatrix}}_{x}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{m}\\ \\ 0\end{bmatrix}}_{b}u$$

$$y=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}_{c^T}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2. Példa

A feladat egy „u” útgerjesztésű egyszerűsített futómű mozgásának vizsgálata. Keresett a tömeg „y” kitérése.



A rendszeregyenlet a következő:

$$c(u-y)+k(\dot{u}-\dot{y})=m\ddot{y}$$

mely rendezés után az alábbi alakú lesz:

$$\ddot{y}=-\frac{k}{m}\dot{y}-\frac{c}{m}y+\frac{k}{m}\dot{u}+\frac{c}{m}u$$

Ha most is az előző példa szerint választanánk meg az állapotváltozókat, ($x_1=\dot{y};\quad x_2=y$), akkor nem lenne lehetséges felírni az állapottér-modellt a kívánt alakban, mivel abban a bemenet $\dot{u}$ deriváltja nem szerepelhet! A 4. Példában megmutatjuk, hogy új változó (új állapotvektor) bevezetésével ez a probléma kiküszöbölhető.

1.1 Átviteli függvény felírása állapottér modellből

Néha az inverz feladat merül fel, amikor ismert a rendszer ÁTM-je, és abból kell felírni a rendszer átviteli függvényét.

Legyen ismert a rendszer lineáris állapottér modellje:

$$\dot{x}=Ax+bu$$
$$y=c^Tx$$

Laplace-transzformálva zérus kezdeti feltételekkel

$$sX(s) = AX(s) + bU(s)$$
$$Y(s) = c^T X(s)$$

Rendezés után (figyelembe véve, hogy mátrixból csak mátrixot lehet kivonni, ezért s-t meg kell szorozni az „I” egységmátrixszal)

$$(sI - A)X(s) = bU(s)$$

Kifejezve az állapotvektort

$$X(s) = (sI - A)^{-1} bU(s)$$

Az átviteli függvény

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c^T (sI - A)^{-1} bU(s)}{U(s)} = \underline{\underline{c^T (sI - A)^{-1} b}}}$$

3. Példa

Ismert az 1.Példából egy erővel (u=f) gerjesztett tömeg, rugó, csillapító rendszer ÁTM-je:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}}_{b} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ahol az állapotvektor komponensei $x_1 = \dot{y}$ és $x_2 = y$.

Határozzuk meg a rendszer átviteli függvényét!

Megoldás

Először az

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét számítjuk ki:

$$\mathrm{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -\frac{c}{m} \\ 1 & s + \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s(s + \frac{k}{m}) + \frac{c}{m} = s^2 + \frac{k}{m}s + \frac{c}{m}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)} = \frac{1}{s^2+\frac{k}{m}s+\frac{c}{m}} \cdot \begin{bmatrix} s & -\frac{c}{m} \\ 1 & s+\frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

A végképletbe helyettesítve kapjuk a keresett átviteli függvényt:

$$G(s) = [0 \quad 1] \frac{1}{s^2+\frac{k}{m}s+\frac{c}{m}} \cdot \begin{bmatrix} s & -\frac{c}{m} \\ 1 & s+\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{ms^2+ks+c}}}$$

Az eredmény helyességéről egyszerűen meggyőződhetünk.
Figyeljük meg, hogy a karakterisztikus egyenlet megegyezik det(sI-A)-val!

2. AZ ÁTM TRANSZFORMÁCIÓJA

Adott alapesetben egy rendszer általános ÁTM-je

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x$$

alakban. Ugyanez a rendszer más állapotváltozók választásával eltérő alakban is felírható. Bizonyos esetekben sokkal egyszerűbb megoldáshoz jutunk speciálisan választott állapottér reprezentációkkal. Megmutatjuk, hogy egy „T” transzformációs mátrixszal más alakra hozható ugyanannak a rendszernek az ÁTM-je.
Legyen az új rendszer állapotvektora

$$\overline{x} = Tx$$

alakú. Az új rendszer állapotegyenletei alakilag hasonlóak az eredetihez:

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A} \cdot \overline{x} + \overline{b} \cdot u$$
$$y = \overline{c^T} \cdot \overline{x}$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan számíthatók az új rendszer mátrixai! Az állapot transzformációból az eredeti állapotvektor

$$x = T^{-1}\overline{x}$$

amit az eredeti rendszer ÁTM-jébe helyettesítve

$$T^{-1}\dot{\overline{x}} = AT^{-1}\overline{x} + bu \quad \rightarrow \quad \dot{\overline{x}} = \underbrace{TAT^{-1}}_{\overline{A}} \cdot \overline{x} + \underbrace{Tb}_{\overline{b}} \cdot u$$

$$y = \underbrace{c^T T^{-1}}_{\overline{c^T}} \cdot \overline{x}$$

Az új rendszer mátrixai az eredeti rendszerből az alábbi transzformációkkal számíthatók:

$$\overline{A} = TAT^{-1}; \quad \overline{b} = Tb; \quad \overline{c^T} = c^T T^{-1}$$

A transzformációs összefüggések segítségével meghatározhatjuk azokat a transzformációs mátrixokat, melyek speciális (irányíthatósági, diagonál, vagy megfigyelhetőségi) alakra hozzák az állapotegyenleteket a későbbi célirányos felhasználhatóság érdekében.

2.1 Irányíthatósági alak (reprezentáció) létrehozása

A rendszer irányíthatósági reprezentációját létrehozhatjuk

a) a rendszer átviteli függvényéből (az átviteli függvény nevezőjének és számlálójának együtthatóit egyszerű szabályok szerint beírva a mátrixokba), valamint

b) a rendszer általános ÁTM modelljéből hasonlósági transzformációval.

2.1.1. Irányíthatósági reprezentáció létrehozása átviteli függvényből

Legyen ismert a rendszer G(s) átviteli függvénye, ahol a számláló b(s), a nevező pedig a(s) polinom alakban van felírva:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

A kimenet

$$Y(s) = b(s)\underbrace{a^{-1}(s)U(s)}_{Z(s)}$$

Vezessünk be új változót:

$$Z(s) = a^{-1}(s)U(s)$$

Így a kimenőjel és a bemenőjel is kifejezhető az új változóval

$$Y(s) = b(s)Z(s)$$
$$U(s) = a(s)Z(s)$$

Az adott példában

$$Y(s) = (b_1 s + b_0)Z(s)$$
$$U(s) = (s^2 + a_1 s + a_0)Z(s)$$

ami idő tartományban is felírható:

$$y = b_1\dot{z} + b_0 z$$
$$u = \ddot{z} + a_1\dot{z} + a_0 z \quad \rightarrow \quad \ddot{z} = -a_1\dot{z} - a_0 z + u$$

Legyenek az állapotvektor elemei (állapotváltozók)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \end{bmatrix}$$

Ezzel a választással az alábbi elsőfokú differenciálegyenlet-rendszert nyerjük.

$$\dot{x}_1 = -a_1\dot{z} - a_0 z + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$
$$y = b_1 x_1 + b_0 x_2$$

A szokásos mátrixos alakban felírva az egyenletrendszert

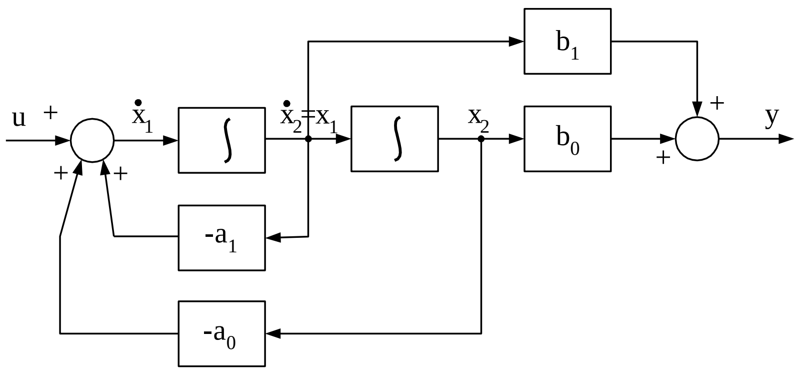
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_1 & -a_0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}b_1 & b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

az alábbi jellemző mátrixokkal:

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix}-a_1 & -a_0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{c}_C^T = \begin{bmatrix}b_1 & b_0\end{bmatrix};$$

Az alábbi ábrán az irányíthatósági reprezentáció blokkdiagramja látható.



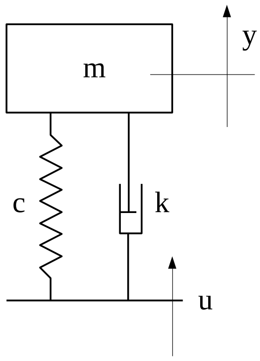
Nagyobb fokszámú rendszerekre általánosítva az egyes mátrixok (vektorok) képzési szabálya könnyen felismerhető: az $\mathbf{A}_C$ rendszermátrix első sorába kerülnek negatív előjellel az átviteli függvény nevezőjének együtthatói. A $\mathbf{c}_C^T$ kimeneti mátrixot az átviteli függvény számlálójának együtthatóiból képezzük. A $\mathbf{b}_C$ bemeneti mátrix első 1 értékű elemén kívül csak zérusokat tartalmaz.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix}-a_{n-1} & .... & -a_1 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{c}_C^T = \begin{bmatrix}b_m & .... & b_1 & b_0\end{bmatrix}$$

Ezt az általános szabályt alkalmazva, az átviteli függvény számlálójának és nevezőjének együtthatóiból egyszerűen képezhetők az állapottér modell irányíthatósági alakjának mátrixai.

4. Példa

A feladat a 2. példa szerinti
„u” útgerjesztésű egyszerűsített futómű mozgásának vizsgálata. Keresett a tömeg „y” kitérése.



A rendszeregyenlet a következő:

$$c(u-y)+k(\dot{u}-\dot{y})=m\ddot{y}$$

mely rendezés után az alábbi alakú lesz:

$$\ddot{y}+\frac{k}{m}\dot{y}+\frac{c}{m}y=\frac{k}{m}\dot{u}+\frac{c}{m}u$$

A rendszer átviteli függvénye

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{k}{m}s+\frac{c}{m}}{s^2+\frac{k}{m}s+\frac{c}{m}}=\frac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

Az együtthatók azonosítása után egyből felírhatjuk az ÁTM irányíthatósági alakját:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{k}{m} & \frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

A 2. példa most már megoldhatóvá vált. Az egyébként más kérdés, hogy az állapotvektor komponenseinek ránézésre nem lehet fizikai tartalmat tulajdonítani.

2.1.2. Irányíthatósági reprezentáció létrehozása állapottér modellből transzformációval

Levezetés nélkül közöljük az irányíthatósági alakba transzformáló „$\mathbf{T}_C$” mátrixot, melynek „c” indexe a controllability-re utal:

$$\boxed{\mathbf{T}_C=[\mathbf{C}(A,b)\boldsymbol{\tau}(a)]^{-1}}$$

A képletben szereplő

$$\mathbf{C}(A,b)=[\mathbf{b}\quad \mathbf{Ab}\quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}\quad \ldots];$$

az ún. *irányíthatósági* (controllability) *mátrix*. A rendszer csak akkor irányítható, ha a **C**(A,b) irányíthatósági mátrix determinánsa zérustól különbözik.

A képletben szereplő másik $\boldsymbol{\tau}(a)$ felső háromszög mátrix a_i elemeit az eredeti rendszer

$$a(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

karakterisztikus polinomjának együtthatóiból képezzük az alábbi szabály szerint:

$$\boldsymbol{\tau}(a) = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & .. & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.Példa

Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixokkal adott rendszer „$\mathbf{T}_C$” transzformációs mátrixát, mely irányíthatósági alakra hozza a rendszert. Írjuk fel ezen mátrix segítségével az irányíthatósági reprezentáció mátrixait!

Megoldás

Először az irányíthatósági mátrixot számítjuk ki. Ehhez szükséges az **A** mátrix négyzete is:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

Az irányíthatósági mátrix első oszlopában a „**b**” vektor, a második oszlopában az „**Ab**” vektor, harmadik oszlopában az „$\mathbf{A}^2\mathbf{b}$” vektor szerepel.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük, hogy a rendszer irányítható-e? Az irányíthatósági mátrix nem szinguláris, mivel determinánsa nem zérus (det[C]=19). A rendszer irányítható, folytathatjuk a számítást.

A rendszer karakterisztikus polinomjának együtthatóit így számítjuk:

$$a(s) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & -2 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & -2 & s+3 \end{vmatrix} = s^3 + \underbrace{1}_{a_2} \cdot s^2 - \underbrace{8}_{a_1} s + \underbrace{0}_{a_0} \rightarrow a_2 = 1; \quad a_1 = -8; \quad a_0 = 0$$

Példánkban a $\boldsymbol{\tau}(a)$ mátrixban csak a_1 és a_2 szerepel:

$$\boldsymbol{\tau}(a) = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Először a transzformációs mátrix inverzét számítjuk ki:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{C}(\mathrm{A},\mathrm{b}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathrm{a}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -19 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}^{-1}]^{-1} = \frac{\mathrm{adj}[\mathrm{T}^{-1}]}{\det(\mathrm{T}^{-1})} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 0 & 38 & 19 \\ 0 & 19 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Az irányíthatósági reprezentációban adott *rendszermátrix* most már kiszámítható:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 0 & 38 & 19 \\ 0 & 19 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -19 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Az irányíthatósági reprezentációban adott *bemeneti mátrix*

$$\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{Tb} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 0 & 38 & 19 \\ 0 & 19 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Az irányíthatósági reprezentációban adott *kimeneti* mátrix pedig

$$\overline{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -19 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -19 \end{bmatrix}$$

A rendszermátrix és a bemeneti mátrix alakjából látszik, hogy valóban irányíthatósági reprezentációt sikerült előállítanunk.

3. SZABÁLYOZÁS ÁLLAPOT VISSZACSATOLÁSSAL (Pólus allokáció)

Mint a neve is mutatja, a rendszer dinamikáját nem a kimenet, hanem az állapotvektor visszacsatolásával valósítjuk meg. A témát két lépésben tárgyaljuk. Először a gerjesztetlen rendszer dinamikáját (csillapítását, sajátfrekvenciáját) változtatjuk meg állapot visszacsatolással, miközben a rendszerre nem adunk alapjelet (a rendszer gerjesztetlen, szabad mozgását végzi a nem egyensúlyi kezdeti feltételek következtében).

Ezt követően a rendszerre alapjelet is kapcsolunk (értéktartó vagy követő szabályozás). Mivel ekkor az állandósult szabályozási hiba nem feltétlenül zérus, ezért további erősítéseket kell alkalmaznunk a hiba megszüntetése érdekében. Mindkét esetben azzal a feltételezéssel élünk, hogy az összes szükséges állapotváltozó értéke rendelkezésre áll, vagyis mindegyiket mérjük valamilyen szenzorral. A valóságban ez sokszor költséges, vagy fizikailag lehetetlen (pl. egy atomerőműben). Ekkor néhány mérhető paraméter és a folyamat közelítő modellje alapján állapotbecslő (observer) segítségével állítják elő a hiányzó paramétereket. Itt utalunk a mechatronika egyik jellemző sajátosságára, a „nem mérhető mennyiségek meghatározása” témakörre. Ezzel a kérdéssel BSc szinten nem foglalkozunk.

4. ÁLLAPOT VISSZACSATOLÁS GERJESZTÉS (ALAPJEL) NÉLKÜL

4.1 Irányíthatósági alakban adott ÁTM esete

Legyen adva a szabályozandó folyamat az állapottér modelljével, melynek bemenete „u”, kimenete „y”. A rendszer dinamikájának megváltoztatása céljából negatív visszacsatolást alkalmazunk, de most nem az „y” kimenetet, hanem az „**x**” állapotvektort csatoljuk vissza egy „$\mathbf{k}^T$” erősítés vektoron keresztül. A $\mathbf{k}^T$-nek annyi komponense lehet, amennyi az állapotvektor elemeinek száma. A folyamat „u” bemenő (irányító) jele most csupán az állapot visszacsatolásból adódik:

$$u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}$$

ahol $\mathbf{k}^T = [k_{n-1} \ldots . k_1 \;\; k_0]$

A rendszer bemenő (irányító) jele részletesen kiírva

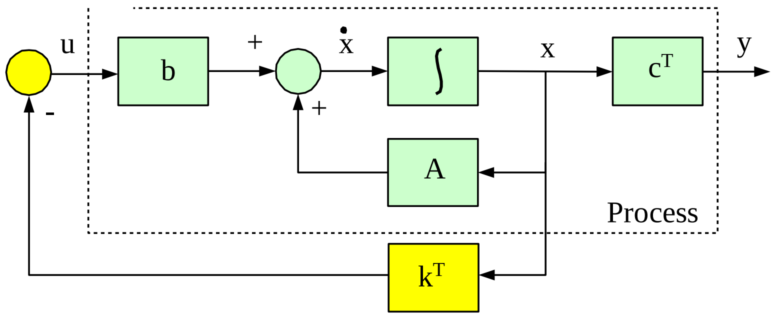
$$u = -k_{n-1}x_1 - \ldots - k_1 x_{n-1} - k_0 x_n$$

Az „u” bemenőjel összefüggését az ÁTM-be helyettesítve, a zárt rendszer állapotegyenlete a következő lesz:

$$\dot{x}_z = Ax_z + b\underbrace{(-k^T x_z)}_{u}$$

A zárt rendszer állapotegyenlete rendezés után

$$\dot{x}_z = (A - bk^T)x_z$$
$$y = c^T x_z$$



A visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja ezzel

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bk}^T) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots . \alpha_1 s + \alpha_0$$

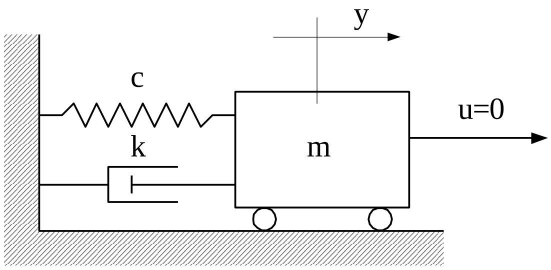
Ha tudjuk, hogy a kívánt minőségi követelményekhez milyen $\alpha(s)$ karakterisztikus polinom tartozik, akkor ezt a karakterisztikus polinomot a „$\mathbf{k}^T$” visszacsatoló vektor elemeinek helyes megválasztásával be tudjuk állítani.

6. Példa

Adott egy u=0 gerjesztetlen lengőrendszer, melynek dinamikáját állapot-visszacsatolt szabályozással kívánunk beállítani.

Adatok: m=20 kg; c=2500 N/m; k=30 Ns/m

Határozzuk meg az állapot-visszacsatolás k_i komponenseit, ha a tömeget egyensúlyi helyzetéből kimozdítva és magára hagyva túllövés mentes beállást tűzünk célul, t_s=0.5 s beállási idővel.



A rendszer jól ismert átviteli függvényét kanonikus alakban írjuk fel (s^2 együtthatója egységnyi)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + ks + c} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{k}{m}s + \frac{c}{m}}$$

$$a_0 = \frac{c}{m};\; a_1 = \frac{k}{m};\; b_0 = \frac{1}{m}$$

A folyamat ÁTM-jének mátrixai irányíthatósági alakban a következők:

$$A_C = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_C^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Konkrét adatokkal

$$A_C = \begin{bmatrix} -1.5 & -125 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Az állapot-visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja (most még ismeretlen nagyságú k_i komponensekkel)

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C + \mathbf{b}_C\mathbf{k}^T) = \det\begin{bmatrix} s + (1.5 + k_1) & (125 + k_0) \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + (1.5 + k_1)s + (125 + k_0)$$

Most nézzük meg, hogy milyennek kellene lenni az állapot-visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomjának ahhoz, hogy teljesüljenek a minőségi követelmények!

Emlékezzünk arra, hogy a szabályozás dinamikáját a zárt rendszer karakterisztikus egyenletének gyökei, vagyis a rendszer pólusai határozzák meg. Túllövés-mentes beálláshoz <u>negatív valós</u> (képzetes rész nélküli) pólusok szükségesek. Válasszuk meg a pólusokat p_1= -10 és p_2= -20 (1/s) értékűre, mely választás szavatolja az előírt beállási idő betartását is. A pólusok megválasztásánál támaszkodnunk kell a pólusok komplex számsíkon való elhelyezkedése és a minőségi követelmények között fennálló kapcsolatok ismeretére.

Ekkor a zárt rendszer általunk előírt, a minőségi követelményeknek eleget tevő karakterisztikus egyenlete

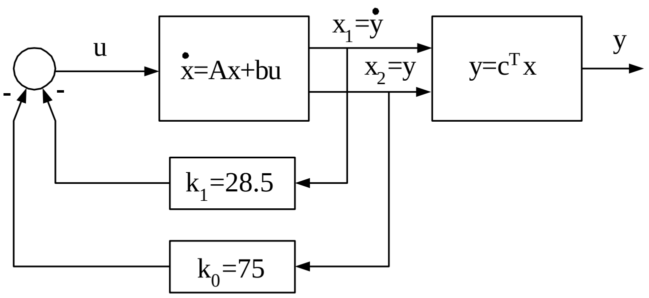
$$\alpha(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s + 10)(s + 20) = s^2 + \underbrace{30}_{\alpha_1} s + \underbrace{200}_{\alpha_0}$$

kell legyen. A minőségi követelményeknek eleget tevő, valamint a $\mathbf{k}^T$ visszacsatolással megvalósítandó karakterisztikus polinomok együtthatóinak azonosságából $\mathbf{k}^T$ komponensei meghatározhatók:

$$1.5 + k_1 = 30 \quad \rightarrow \quad k_1 = 28.5$$

$$125 + k_0 = 200 \quad \rightarrow \quad k_0 = 75$$

A megvalósított állapot-visszacsatolású szabályozás blokkdiagramja az ábrán látható.



4.2. Nem irányíthatósági alak esete

Az esetek többségében az ÁTM általános alakú (sem nem irányíthatósági, sem nem diagonál, sem nem megfigyelhetőségi alakú). Ilyenkor vagy

1. áttranszformáljuk a rendszert irányíthatósági alakra, vagy
2. egy tipikusan erre az esetre levezetett ún. Ackermann-formulával oldjuk meg
3. egy tipikusan erre az esetre levezetett ún. Bass-Gura formulával oldjuk meg

7. Példa

Adott az alábbi rendszer az általános ÁTM-jével:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tervezzünk állapot visszacsatolást, amely a rendszer pólusait a következő értékekbe helyezi $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

A pólusok előírt helyre történő elhelyezését pólusallokációnak is nevezik.

4.2.1 Megoldás irányíthatósági alakba való transzformálással és a kar. polinomok együtthatóinak egyenlővé tételével

Az előző 5. Példa eredményeit felhasználva a rendszer irányíthatósági alakba transzformáló mátrixa:

$$\mathbf{T}_C = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 0 & 38 & 19 \\ 0 & 19 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$, mellyel a rendszer irányíthatósági reprezentációjának mátrixai a következők:

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_C^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -19 \end{bmatrix}$$

Irányíthatósági reprezentációban a rendszer karakterisztikus polinomja a következő:

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C + \mathbf{b}_C\mathbf{k}_C^T) = \begin{vmatrix} s+(1+k_{C2}) & (-8+k_{C1}) & k_{C0} \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = \underline{s^3 + (1+k_{C2})s^2 + (-8+k_{c1})s + k_{C0}}$$

(Az irányíthatósági alak előnye, hogy a karakterisztikus polinom együtthatói a determináns első sorából egyszerűen kiolvashatók)

A megkövetelt rendszer karakterisztikus polinomja a feladat szerint

$$\alpha(s) = (s+1)(s+2)(s+5) = \underline{s^3 + \underbrace{8}_{\alpha_2}s^2 + \underbrace{17}_{\alpha_1}s + \underbrace{10}_{\alpha_0}}$$

A karakterisztikus polinomok együtthatóit összehasonlítva nyerjük az erősítéseket:

$$k_{C0} = 10; \quad k_{C1} = 25; \quad k_{C2} = 7$$

Ezek az erősítések nem az eredeti, hanem az irányíthatósági alakba transzformált rendszerben érvényesek, ezért vissza kell számítani azokat az eredeti rendszerbe:

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_C^T\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 7 & 25 & 10 \end{bmatrix}\frac{1}{19}\begin{bmatrix} 0 & 38 & 19 \\ 0 & 19 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{19} & \frac{821}{19} & \frac{153}{19} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}526 & 43{,}21 & 8{,}052 \end{bmatrix}}}$$

4.2.2 Megoldás Bass-Gura formulával

Az előző gondolatmenetet egyetlen képletbe sűrítve kapjuk a

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{k}^T = (\alpha - a)^T \tau(a)^{-1} C^{-1}}}}$$

Bass-Gura formulát, melyben $(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})^T = \mathbf{k}_C^T$ a karakterisztikus egyenletek együtthatóinak különbsége, $\boldsymbol{\tau}(a)^{-1}\mathbf{C}(A,b)^{-1} = \mathbf{T}$ pedig a transzformációs mátrix.

Az eredeti (visszacsatolatlan) rendszer karakterisztikus polinomjának együtthatóit így számítjuk (most természetesen a $\mathbf{bk}^T$ visszacsatolási tényezők nélkül):

$$a(s) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & -2 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & -2 & s+3 \end{vmatrix} = s^3 + \underbrace{1}_{a_2} \cdot s^2 - \underbrace{8}_{a_1}s + \underbrace{0}_{a_0} \rightarrow a_2 = 1; \quad a_1 = -8; \quad a_0 = 0$$

Ebben az esetben a $\tau(a)$ mátrixban csak a_1 és a_2 szerepel:

$$\boldsymbol{\tau}(a) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a_2 & a_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A mátrix inverze

$$\boldsymbol{\tau}(a)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}[\tau(a)]}{\det[\tau(a)]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})^T$ vektor a célul tűzött és az eredeti karakterisztikus egyenlet együtthatóinak különbségéből számítandó:

$$(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})^T = [(\alpha_2 - a_2) \quad (\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_0 - a_0)] = [7 \quad 25 \quad 10]$$

A részeredményeket (beleértve az előző példában meghatározott irányíthatósági mátrixot is) a végképletbe helyettesítve

$$\mathbf{k}^T = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\tau}(a)^{-1} \mathbf{C}^{-1} = [7 \quad 25 \quad 10] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tau(a)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -7 & 3 \\ -1 & 27 & 2 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{19}}_{C^{-1}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \overbrace{-0{,}526}^{k_2} & \overbrace{43{,}21}^{k_1} & \overbrace{8{,}052}^{k_0} \end{bmatrix}}}$$

4.2.3 Megoldás Ackermann-formulával

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{k}^T = [0 \quad 0 \quad .... \quad 1] \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}(A)}}}$$

ahol az

$$\boldsymbol{\alpha}(A) = \mathbf{A}^n + ... + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}$$

mátrix α_i együtthatói a megkövetelt karakterisztikus polinom együtthatói. Az irányíthatósági mátrix inverze

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(C)}{\det(C)} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 8 & -7 & 3 \\ -1 & 27 & 2 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Az $\boldsymbol{\alpha}(A)$ mátrix számítását részletesen kiírva:

Az **A** mátrix hatványai:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 21 \\ 0 & 10 & 9 \\ 0 & 18 & -35 \end{bmatrix}$$

A megkövetelt rendszer karakterisztikus polinomja

$$\alpha(s) = (s+1)(s+2)(s+5) = s^3 + \underbrace{8}_{\alpha_2} s^2 + \underbrace{17}_{\alpha_1} s + \underbrace{10}_{\alpha_0}$$

Ezekkel

$$\boldsymbol{\alpha}(A) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 21 \\ 0 & 10 & 9 \\ 0 & 18 & -35 \end{bmatrix}}_{A^3} + 8\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix}}_{A^2} + 17\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} + 10\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} = \begin{bmatrix} 10 & 67 & 15 \\ 0 & 102 & 18 \\ 0 & 36 & 12 \end{bmatrix}$$

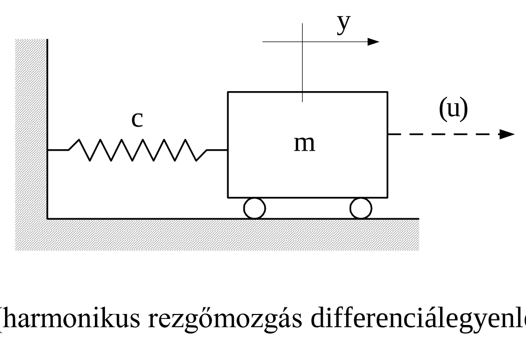
A részletszámításokat az **Ackermann**-formulába helyettesítve

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 8 & -7 & 3 \\ -1 & 27 & 2 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 67 & 15 \\ 0 & 102 & 18 \\ 0 & 36 & 12 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}526 & 43{,}21 & 8{,}052 \end{bmatrix}}}$$

Mindhárom módszer azonos eredményt adott.

8. Példa

Legyen adott egy csillapítatlan, gerjesztetlen, $\omega_0 = \alpha = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ sajátfrekvenciájú, m=1 kg tömegű lengőrendszer (oszcillátor) az ábra szerint:



A rendszer mozgásegyenlete (harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete)

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

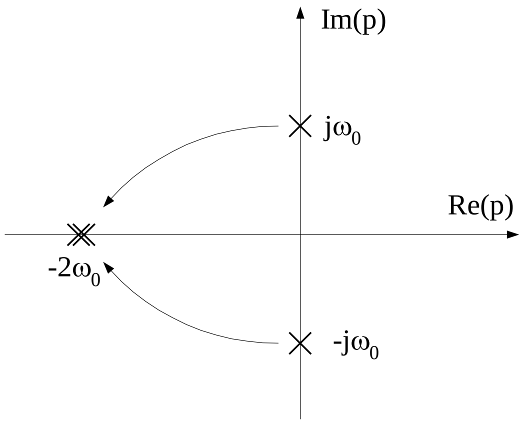
Laplace-transzformálva az egyenletet a kezdeti feltételek figyelembe vételével (mivel nincs gerjesztés, ezért kezdeti feltételek is kellenek a mozgás létrejöttéhez):

$$[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + \omega_0^2 Y(s) = 0$$

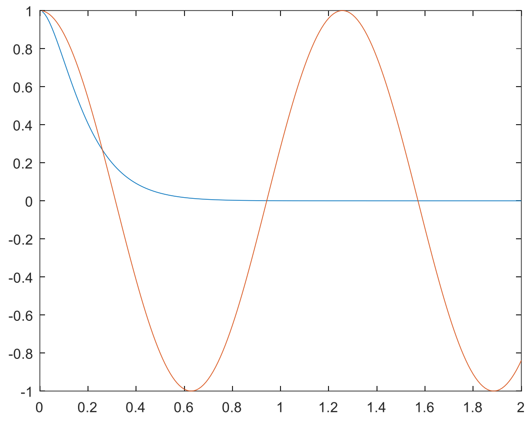
$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0)}{s^2 + \omega_0^2} \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\omega_0$$

Feladat

Állapot-visszacsatolással módosítandó a rendszer dinamikája úgy, hogy a $\pm j\omega_0$ konjugált képzetes póluspárt vigye át a $-2\omega_0$ valós egybeeső pólusokba. Más szóval az eredetileg D=0 csillapítatlan rendszer csillapítását D=1 értékre változtassa és gyorsítsa a rendszert, hogy az eredetileg csillapítatlan lengőrendszer aperiodikus mozgással gyorsabban jusson nyugalomba.



A pólusok áthelyezése



A rendszer beállása

Az ábrán zérus kezdősebességgel, y_0=1 kitéréssel indítjuk az eredeti lengőrendszert ω_0=5 rad/s sajátfrekvenciával (piros görbe). Szabályozást (állapot visszacsatolást) alkalmazva ugyanilyen kezdeti állapotból indítva a rendszert, aperiodikus beállást kapunk (kék ábra) Emlékeztető: a kék függvény egyenlete $y(t) = Ae^{-2\omega_0 t} + Bte^{-2\omega_0 t}$.

Megjegyzendő, hogy a feladat egy <u>gerjesztetlen rendszer</u> dinamikájának megváltoztatását tűzi célul, tehát az „u” nem külső gerjesztés, hanem a dinamikát megváltoztató szabályozó hatása a gerjesztetlen rendszerre.

1. Megoldás elemi módszerrel

A feladat a rendszer kis méreténél fogva (N=2) nem igényel irányíthatósági alakú állapotteres reprezentációt, elemi lépésekkel is megoldható. Egyelőre u=0 bemenetet (szabad mozgás adott kezdeti feltételekkel) feltételezünk. Az állapotvektor komponensei legyenek x_1=y és x_2=dy/dt.. A választás olyan szempontból is előnyös, hogy az állapotvektor könnyen mérhető.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

A célul tűzött karakterisztikus polinom két egybeeső $p_1 = p_2 = -2\omega_0$ valós pólus esetén

$$\alpha(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s + 2\omega_0)(s + 2\omega_0) = s^2 + \underbrace{4\omega_0}_{\alpha_1} s + \underbrace{4\omega_0^2}_{\alpha_0}$$

Az állapot-visszacsatolással megvalósítandó szabályozási kör karakterisztikus polinomja

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{s^2 + k_0 s + (\omega_0^2 + k_1)}$$

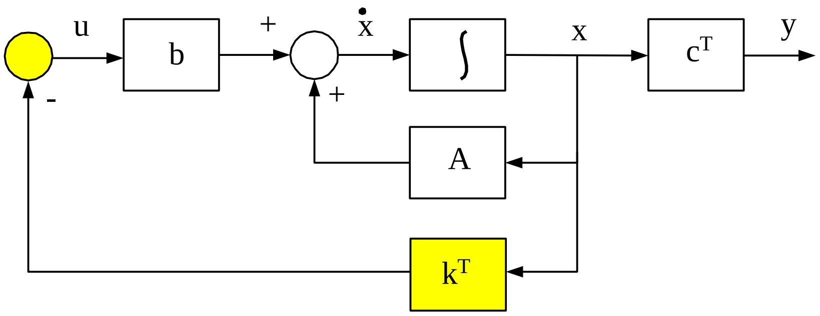
Összehasonlítva a két karakterisztikus polinom együtthatóit:

$$4\omega_0 = k_0$$
$$4\omega_0^2 = \omega_0^2 + k_1$$

Az állapot-visszacsatolás komponensei a következők:

$$\underline{\underline{\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{bmatrix}}}$$

A szabályozás blokkdiagramja az ábrán látható.



Ahogy említettük, bár van visszacsatolás, ettől a rendszer még gerjesztetlen (nincs alapjel). Tehát ha a tömeget kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, akkor az aperiodikus mozgással visszatér oda. Visszacsatolás nélkül a tömeg csillapítatlanul lengene.

***2.Megoldás Ackermann*-formulával**:

$$\underline{\underline{\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = [0\ \ 0.....0\ \ 1]\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A})}}$$

Az előbbi megoldás alapján az előírt (kívánt) karakterisztikus polinom együtthatói

$$\alpha_1 = 4\omega_0 \quad \text{és} \quad \alpha_0 = 4\omega_0^2$$

Először számítsuk ki az irányíthatósági (Controllability) mátrixot:
A „**C**” mátrix első oszlopába a „**b**” vektor kerül

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A „**C**” mátrix második oszlopába „**Ab**” vektor kerül

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az irányíthatósági mátrix ezzel

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel det[C]=-1 (nem nulla), a rendszer irányítható, a számítást folytathatjuk. Az irányíthatósági mátrix inverze a részletszámítások mellőzésével

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Most az $\alpha(\mathrm{A})$ mátrix elemeit számítjuk ki. Ehhez szükségünk lesz az **A** mátrix négyzetére

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{bmatrix}$$

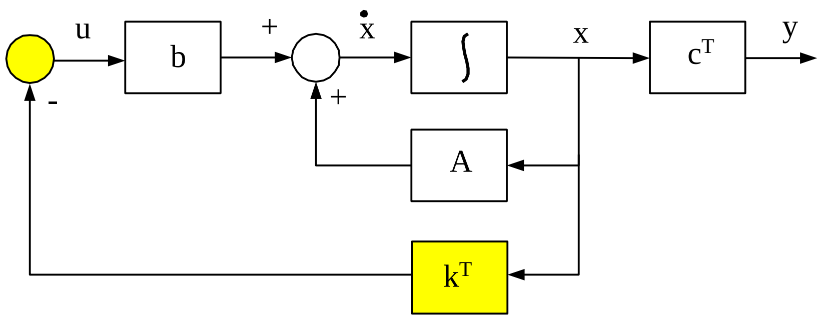
Most már felírhatjuk az $\boldsymbol{\alpha}$(A) mátrixot

$$\alpha(\mathrm{A}) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{bmatrix}}_{\mathrm{A}^2} + \underbrace{4\omega_0}_{\alpha_1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{A}} + \underbrace{4\omega_0^2}_{\alpha_0}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \\ -4\omega_0^3 & 3\omega_0^2 \end{bmatrix}$$

Az ***Ackermann*** -formulába helyettesítve a részeredményeket:

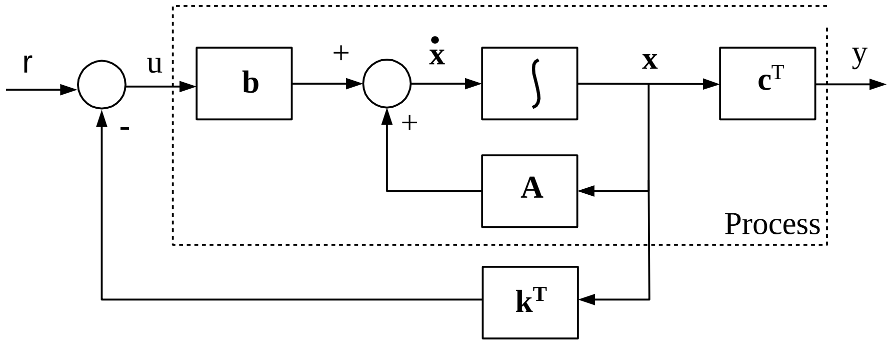
$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \\ -4\omega_0^2 & 3\omega_0^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{bmatrix}}}$$

Az eredmény megegyezik az előző módszerrel kapott eredménnyel.



5. TELJES ÁLLAPOT VISSZACSATOLÁS

Most működtessünk gerjesztést (alapjelet) is a szabályozandó folyamatra. Az alapjelet jelölje „r” (reference).



A folyamat bemenő jele most

$$u = r - \mathbf{k}^T \mathbf{x}$$

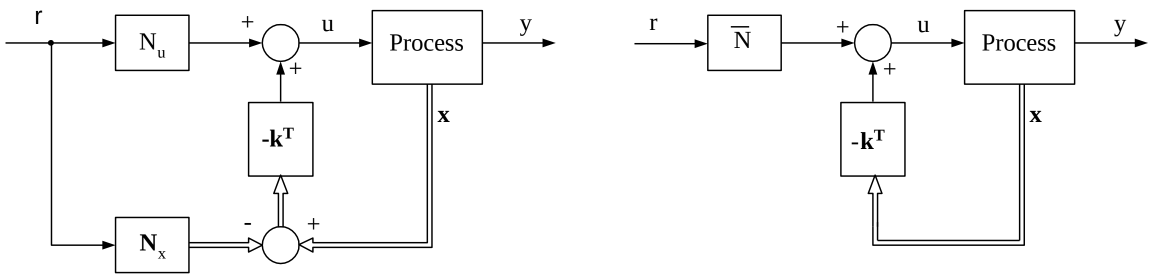
A rendszer bemenő (irányító) jele részletesen kiírva

$$u = r - k_{n-1}x_1 - \ldots - k_1 x_{n-1} - k_0 x_n$$

Általában <u>semmi sem garantálja, hogy ugrásfüggvény alapjelet működtetve a rendszerre, az állandósult szabályozási eltérés zérus legyen.</u> Állandósult esetben ($t \to \infty$) az állapotvektor x_∞, az irányító jel u_∞, a kimenő jel y_∞ értéket vesz fel. Amennyiben hibamentes beállást szeretnénk elérni, akkor az irányító jelnek $u = u_\infty$ -nek kell lenni, miközben az állapot-visszacsatoló ágon nem folyik jel.

Ehhez két dolgot kell biztosítani:

1. az x_∞ állapotvektorhoz egy ugyanakkora, de ellentétes előjelű $\mathbf{x}_\infty = \mathbf{N}_\mathbf{x} \cdot r$ jelet kell hozzáadni, hogy az állapot visszacsatoló (függőleges) ágon ne haladjon jel állandósult állapotban
2. ahhoz, hogy az irányító jel u_∞ legyen állandósult állapotban, egy $u_\infty = N_u r$ jelet kell vezetni a folyamatra (vízszintes ág).



Az ábrán a dupla vonal egy vektornak több skalár komponensére utal, a sima vonal skalár változót jelent. Állandósult esetre felírva az ÁTM-t (az $\dot{x}_\infty$ derivált zérus értékű állandósult állapotban):

$$0 = \mathbf{A} \cdot \overbrace{\mathbf{x}_\infty}^{N_x r} + \mathbf{b} \cdot \overbrace{u_\infty}^{N_u r}$$

$$y_\infty = \mathbf{c}^T \cdot \underbrace{\mathbf{x}_\infty}_{N_x r}$$

Tételezzünk fel r=1(t) egységugrás bemenetet és $y_\infty = 1$ hibamentes állandósult kimenetet, ekkor a fenti állapotegyenleteket egyetlen mátrixos alakban felírva

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^\mathbf{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

adódik, ahol $\mathbf{N}_x$ vektor, N_u skalár. Vegyük észre, hogy a hipermátrixban mátrixok és vektorok egyaránt szerepelnek! Az erősítések kifejezhetők az alábbi egyenletből:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^\mathbf{T} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egyébként a két erősítés összevonható egyetlen skalár erősítéssé a fenti ábra jobb oldali blokkdiagramja alapján:

$$\overline{N} = N_u + \mathbf{k}^T \mathbf{N}_x$$

9. Példa

A 8. példa lengőrendszerére alkalmazzunk erőgerjesztést. Azt szeretnénk, hogy a tömeg aperiodikusan álljon be $y_\infty = 0{,}05$ m pozícióba F=0,2 N ugrásfüggvény gerjesztés hatására.

Határozzuk meg az N_u és $\mathbf{N}_x$ erősítéseket, hogy az állandósult szabályozási eltérés zérus legyen, miközben a pólusokat is áthelyezzük az aperiodikus beállás érdekében a $-2\omega_0$ pontba. Adatok:

u=F=0,2·1(t) N
m=1 kg
c=4 N/m
(ω_0=2 rad/s, D=1)
$y_\infty = F/c = 0{,}05$ m

Megoldás

Az előző 8. példából a pólusáthelyezést biztosító erősítések:

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix}$$

A rendszer ÁTM mátrixai:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A megoldandó egyenletrendszer mátrixosan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{x1} \\ N_{x2} \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az inverz mátrix kiszámítása helyett az alábbi skalár egyenletekből fejezzük ki az ismeretleneket:

$$N_{x2} = 0$$
$$-4N_{x1} + N_u = 0$$
$$N_{x1} = 1$$

Innen $\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad N_u = 4$ adódik.

Az erősítéseket összevonva

$$\overline{N} = N_u + \mathbf{k}^T \mathbf{N}_x = 4 + \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 16$$

Az alapjelet tehát meg kell szorozni 16-tal, hogy az állandósult szabályozási hiba zérus legyen!

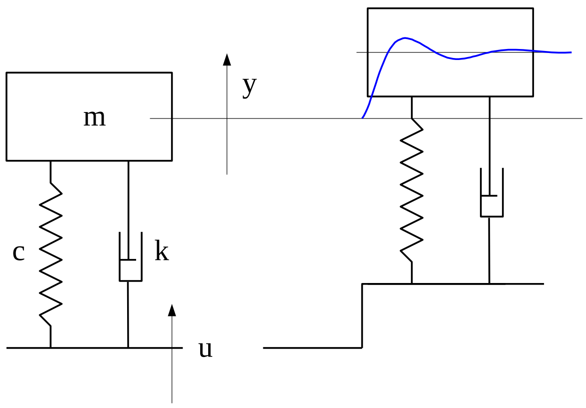
A gyakorlati megvalósítást illetően a gerjesztő erőt pl. egy áramgenerátorral hajtott lineármotor hozza létre (F=Bil), melynek áramát úgy kell előírni, hogy a motor által kifejtett erő a 0,2N alapjel 16-szorosának, a mért elmozdulás -8-szorosának, valamint a mért sebesség –12-szeresének előjelhelyes összege legyen. A motornak az indulás pillanatában 3,2N erőt kell tudni kifejteni.

10. Példa

A 4. Példa útgerjesztésű motorkerékpár futómű adatai a következők:

m=50 kg
k=200 Ns/m
c=4000 N/m

Azt szeretnénk, hogy a futómű u=0,1 m ugrásfüggvény bemenet hatására t_s=1,6 s alatt álljon be y_∞=0,1 m pozícióba 10% túllövéssel!
Határozzuk meg az aktív felfüggesztés ATM modelljének $\mathbf{k}^T$ és N paramétereit!



Megoldás

A szabályozott (zárt, visszacsatolt) rendszer szükséges D csillapítását és α sajátfrekvenciáját a dinamikus minőségi követelményekből (túllövés, beállási idő) határozzuk meg:

$$D = \frac{|\ln M_p|}{\sqrt{(\ln M_p)^2 + \pi^2}} = \frac{|\ln 0{,}1|}{\sqrt{(\ln 0{,}1)^2 + \pi^2}} = 0{,}6$$

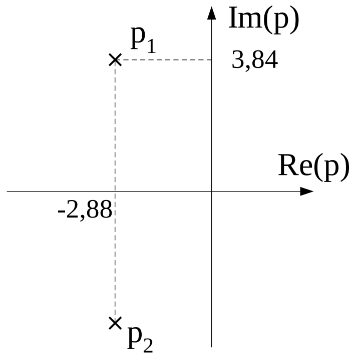
$$\alpha = \frac{4{,}6}{Dt_s} = \frac{4{,}6}{0{,}6 \cdot 1{,}6} = 4{,}8 \text{ rad/s}$$

$$\beta = D\alpha = 0{,}6 \cdot 4{,}8 = 2{,}88 \text{ 1/s}$$

$$\gamma = \alpha\sqrt{1 - D^2} = 4{,}8\sqrt{1 - 0{,}6^2} = 3{,}84 \text{ rad/s}$$

A másodrendű lengőképes rendszer konjugált komplex pólusai, melyek a dinamikus minőségi követelményeket biztosítják:

$$p_1 = -\beta + j\gamma = -2{,}88 + j3{,}84$$
$$p_2 = -\beta - j\gamma = -2{,}88 - j3{,}84$$



A rendszer szükséges karakterisztikus egyenlete gyöktényezős alakban:

$$\alpha(s) = (s - p_1)(s - p_2) = [s - (-2{,}88 + j3{,}84)][s - (-2{,}88 - j3{,}84)] = s^2 + \underbrace{5{,}76}_{a_1}s + \underbrace{23{,}04}_{a_0}$$

Az állapot visszacsatolt rendszer $\mathbf{k}^T$ visszacsatolás vektorát abból a feltételből határozzuk meg, hogy a rendszer karakterisztikus polinomja megegyezzen a szükséges követelményeket biztosító karakterisztikus polinommal. Az állapot-visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T)=\det\left(\begin{bmatrix} s+k/m & c/m \\ -1 & s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_0 \end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix} (s+k/m+k_1) & (c/m+k_0) \\ -1 & s \end{vmatrix}=$$

$$=s^2+\underbrace{(k/m+k_1)}_{a_1}s+\underbrace{(c/m+k_0)}_{a_0}$$

A szükséges és a visszacsatolással megvalósítandó karakterisztikus egyenletek együtthatóit összehasonlítva kiszámítjuk az állapot-visszacsatolás erősítéseit

$$c/m+k_0=23{,}04 \quad\rightarrow\quad k_0=23{,}04-4000/50=15{,}04$$

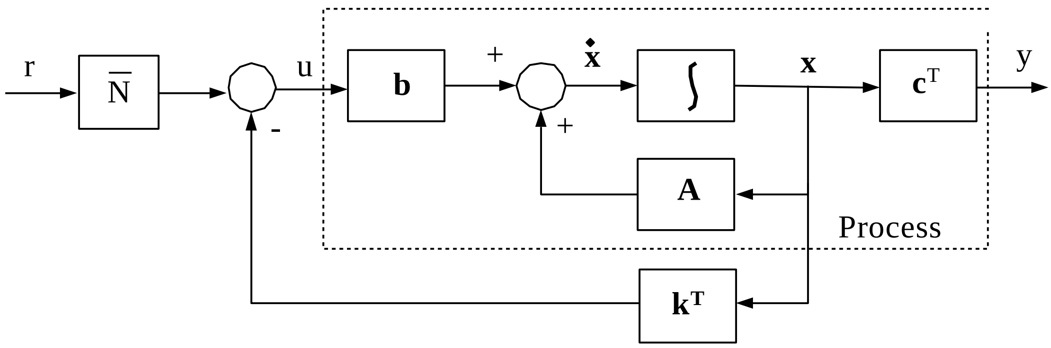
$$k/m+k_1=5{,}76 \quad\rightarrow\quad k_1=5{,}76-200/50=1{,}76 \qquad \mathbf{k}^T=\begin{bmatrix} 1{,}76 & 15{,}04 \end{bmatrix}$$

Az állandósult szabályozási hiba-mentes beállást biztosító erősítések

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -80 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 80 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{80}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 80 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A szükséges erősítés

$$\overline{N}=N_u+\mathbf{k}^T\mathbf{N}_x=1+\begin{bmatrix} 1{,}76 & 15{,}04 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=2{,}76$$



11. Példa

a) Határozzuk meg a DC motor ÁTM modelljét!
b) Az ATM modellből határozzuk meg a DC motor átviteli függvényeit!

ad a) Az induktivitás elhanyagolásával és a szokásos jelölésekkel (k=Blr) a villamos és a mechanikus rész egyenletei:

$$u_k-iR-k\omega=0 \quad\rightarrow\quad i=\frac{u_k-k\omega}{R}$$

$$ki-M_t=J\dot{\omega} \quad\rightarrow\quad \dot{\omega}=\frac{k}{JR}u_k-\frac{k}{JR}\omega-\frac{1}{J}M_t$$

Legyen az állapotvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix}$$

Az ÁTM modell a mátrixok kitöltésével adódik:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k^2}{JR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{JR} & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_k \\ M_t \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix}$$

ad b) A DC motor átviteli függvényei.
Két átviteli függvényre számítunk, mivel két változótól (u_k és M_t) függ a motor szögsebessége.

$$\underline{G}(s) = \underline{c}^T (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{B}}$$

$$(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{k^2}{JR} \end{bmatrix}$$

$$(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} = \frac{1}{s\left(s + \frac{k^2}{JR}\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{k^2}{JR} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s\left(s + \frac{k^2}{JR}\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{k^2}{JR} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{JR} & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s\left(s + \frac{k^2}{JR}\right)} \begin{bmatrix} \frac{k}{JR} & -\frac{1}{J} \\ s\frac{k}{JR} & -s\frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s\left(s + \frac{k^2}{JR}\right)} \begin{bmatrix} s\frac{k}{JR} & -s\frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{U_k(s)} = \frac{k}{JRs + k^2}$$

$$G_2(s) = \frac{\Omega(s)}{M_t(s)} = -\frac{R}{JRs + k^2}$$

A kimenő jel

$$\Omega(s) = G_1(s)U_k(s) + G_2(s)M_t(s)$$