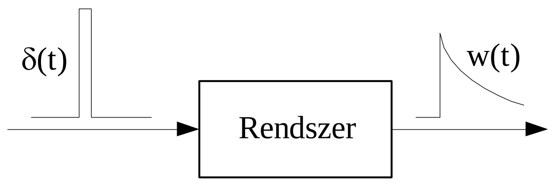
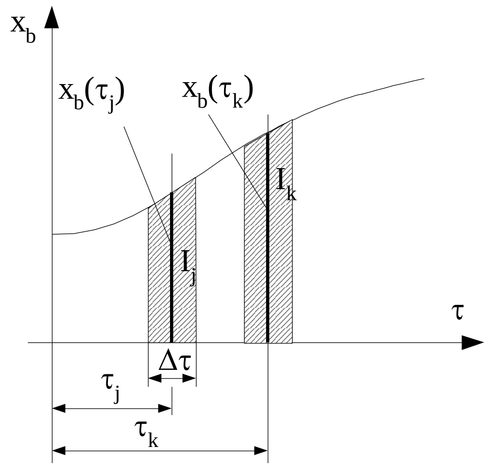
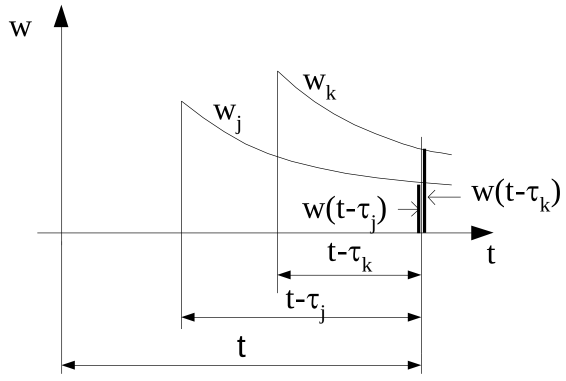
Konvolúció

Egy rendszert jellemezhetünk a rendszeregyenletével, állapottér-modelljével, átviteli függvényével, sőt egység-impulzus (Dirac-delta) bementre adott w(t) súlyfüggvényével is.



Tegyük fel, hogy a tetszőleges $x_b(\tau)$ bemenő jel felbontható kicsiny, $x_b\Delta\tau$ nagyságú négyszögjelekre, vagyis közelítőleg impulzusokra. A $\tau_j=j\cdot\Delta\tau$ időpontban fellépő egységimpulzusra a rendszer válasza t időpontban $w(t-\tau_j)$ lenne.





Ha a gerjesztő impulzus nem egységnyi, hanem $x_b(\tau_j)\Delta\tau$ nagyságú, akkor a kimenet is azzal arányos, $x_b(\tau_j)\Delta\tau \cdot w(t-\tau_j)$ lesz. Egy kérdéses t időpontban az összes addigi impulzus bemenet egymástól függetlenül érezteti hatását. Az egyes impulzusokra adott válaszok összegeződnek (lineáris rendszer esetén érvényes a szuperpozíció elve). A kimenet t időpontban tehát közelítőleg

$$x(t) \approx \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_b(\tau_j)\Delta\tau}_{I_j \text{ impulzus}} \cdot \underbrace{w(t-\tau_j)}_{\text{súlyfv.}}$$

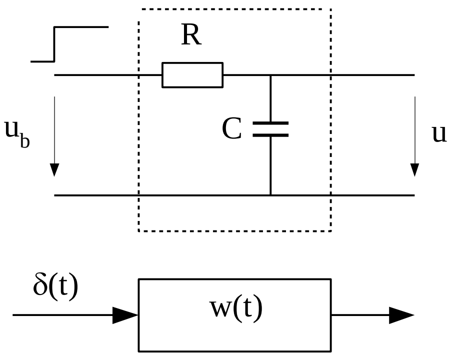
Ha képezzük a $\Delta\tau \to 0$ határátmenetet (finomítjuk a négyszögjelek szélességét, amíg elméleti Dirac-deltát kapunk), akkor a szummázás átmegy integrálba és az

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{j=1}^{n} x_b(\tau_j)\Delta\tau \cdot w(t-\tau_j) = \int_0^t x_b(\tau)w(t-\tau)d\tau$$

konvolúciós integrált nyerjük, mellyel közvetlenül időtartományban kapjuk meg a kimenő jelet.

Példa

Adjunk egy RC tagra ugrásfüggvény gerjesztést és határozzuk meg a kimenő jelet közvetlenül időtartományban! A kezdeti feltétel legyen u(0)=0.



a) Először a rendszer súlyfüggvényét határozzuk meg.
A rendszer gerjesztése legyen Dirac-delta, hogy a kimeneten a súlyfüggvényt nyerjük:

$$RC\frac{dw}{dt} + w = \delta(t)$$

A Dirac-delta gerjesztést úgy tüntetjük el az analitikus megoldásból, hogy integráljuk az egyenletet 0^- és 0^+ között, és az egy pillanatig tartó impulzus gerjesztés helyett kezdeti feltételt számolunk.

$$RC[w(0^+) - \underbrace{w(0^-)}_{\substack{\text{kezd.felt} \\ 0}}] + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} w dt}_{0} = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt}_{1}$$

$$w(0^+) = \frac{1}{RC}$$

Ezzel a kezdeti feltétellel indul a továbbiakban már gerjesztetlen rendszer, melynek súlyfüggvénye:

$$w(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

b) Most a rendszerre a bemenetként megadott $u_b(\tau)=1(\tau)$ ugrásfüggvényt kapcsoljuk. A kimenetet konvolúciós integrállal számítjuk. A definíció szerint τ helyett t-τ eltolt idővel kell számolni:

$$u(t) = \int_0^t \underbrace{1(\tau)}_{u_b} \underbrace{\frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}}}_{w(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{RC(-\frac{1}{RC})} \left[e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \right]_0^t = \underline{\underline{1 - e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

A súlyfüggvény előállítása, valamint a konvolúciós integrál analitikus kiszámítása munkaigényes, még ilyen egyszerű esetben is. Numerikus módszerekkel az integrál kiszámítása viszont nem ütközik nehézségbe bonyolult esetekben sem.
Az eredmény helyességéről meggyőződhetünk, ha a differenciálegyenletet idő tartományban megoldjuk.

Ellenőrzés

$$RC\frac{du}{dt} + u = 1 \qquad u(0) = 0$$

$$u_h = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

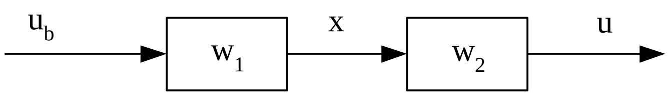
$$u_p = 1$$

Kezdeti feltétel:

$$0 = Ke^{-\frac{0}{RC}} + 1 \qquad \rightarrow K = -1$$

$$u(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

Két sorba kapcsolt elem esetén a kimenő jelet szintén meghatározhatjuk konvolúcióval.



$$x(t) = \int_0^t u_b(\tau) w_1(t-\tau) d\tau$$

$$u(t) = \int_0^T \int_0^t u_b(\tau) w_1(t-\tau) d\tau \cdot w_2(T) dT$$