

A szabályozás minőségi követelményei

A szabályozások tervezésekor néhány szemléletes követelményt adnak meg, melyek főként a szabályozás tranziens viselkedésre, kisebb részt az állandósult állapotra vonatkoznak

A) Tranziens jellemzők (1. ábra)

a) *Emelkedési idő*, t_r (rise time).

A szabályozott jellemző felfutására jellemző. Az az időtartam, ami alatt az átmeneti függvény az állandósult értékének 10 százalékáról 90 százalékára növekszik

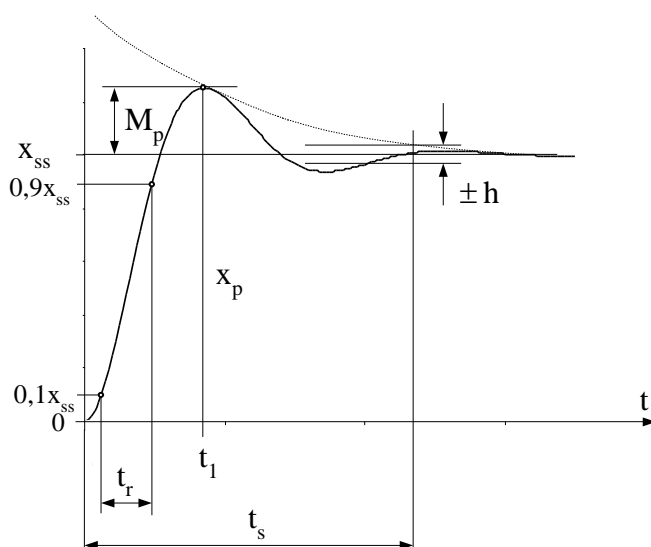
b) *Beállási idő*, t_s (settling time).

A tranziens elhalásának gyorsaságára jellemző. Az az idő, mely eltelte után a rendszer kimenetének eltérése az állandósult értéktől kisebb, mint egy megadott hibaszázalék ($h=1\%, 2\%, 5\%$).

c) *Túllövés*, M_p (peak magnitude)

A kimenőjel első túllendülésének (x_p) százalékos értéke az állandósult értékhez (x_{ss} :

steady state) viszonyítva: $M_p = \frac{x_p - x_{ss}}{x_{ss}}$



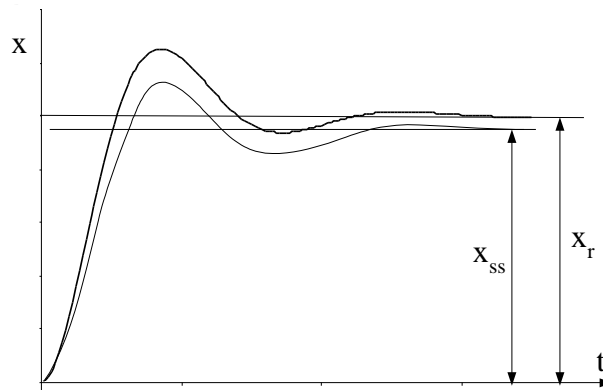
1. ábra. Tranziens jellemzők értelmezése

B) Állandósult jellemző (2. ábra)

a) *Állandósult szabályozási eltérés*

A szabályozott jellemző állandósult értékének százalékos eltérése az alapjeltől (kívánt

értéktől): $h_\infty = \frac{x_r - x_{ss}}{x_r}$



2. ábra. Állandósult szabályozási eltérés értelmezése

c) Összetett jellemző

Egy-számados jellemző (Integrál-kritérium) a beállási folyamat értékelésére
Például

$$I_1 = \int_0^{\infty} (x - x_{ss}) dt$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} |x - x_{ss}| dt$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} (x - x_{ss})^2 dt .$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} (x - x_{ss})^2 t dt \quad \text{stb.}$$

1) A minőségi követelmények kapcsolata a rendszer α és D paraméterével

Tételezzük fel, hogy a zárt szabályozási kör az alábbi ún. „normál alakú” másodrendű átviteli függvénnyel adott

$$Y(s) = \frac{\alpha^2}{s^2 + 2D\alpha s + \alpha^2} \quad (1)$$

melynek nagy előnye, hogy a két legfontosabb rendszerjellemző, a D csillapítás és az α „csillapításmentes sajátfrekvencia” közvetlenül leolvasható. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a vizsgált átviteli függvény nem tartalmaz zérót (számlálójában „s”-es tagot), ezért következtetések csak ilyen típusú, és csupán másodrendű rendszerre lesznek helytállóak! Mindazonáltal a szabályozási kör ilyen típusú másodrendű átviteli függvénnyel való modellezése szinte az összes lehetséges jelenség analitikus tárgyalását lehetővé teszi.

Az (1) másodrendű rendszer egységugrás-függvényre adott válasza az átmeneti függvény-idő tartományban levezetés nélkül a következő:

$$x(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (2)$$

Az összefüggésben

$\sigma = D\omega_n$ a csillapodó rezgések burkológörbéjét leíró exponenciális függvény kitevője.

$\omega_d = \alpha\sqrt{1-D^2}$ a csillapodó rezgések tényleges, mérhető körfrekvenciája, a „csillapított sajátfrekvencia”.

a) Túllövés és a csillapítás kapcsolata

A túllövés analitikus meghatározásához az átmeneti függvény első maximumát kell megtalálni. Mint ismeretes, egy függvény szélsőértéke ott van, ahol első deriváltja zérus. A derivált függvény a következő:

$$\frac{dx(t)}{dt} = e^{-\sigma t} \left(\sigma \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - e^{-\sigma t} \left(-\omega_d \sin \omega_d t + \sigma \cos \omega_d t \right) = e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma^2}{\omega_d} + \omega_d \right) \sin \omega_d t$$

A derivált három tényezője közül az első kettő nem lehet nulla, csak a harmadik. Szélsőérték tehát a

$$\sin \omega_d t = 0 \rightarrow \omega_d t_k = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

feltétel teljesülésekor áll fenn. Az első túllövés ideje ($k=1$):

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Az átmeneti függvény első maximuma tehát

$$x(t_1) = 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}}$$

amit $1+M_p$ alakban is írhatunk. Innen a túllövés a második tagok összehasonlításával adódik:

$$M_p = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}}$$

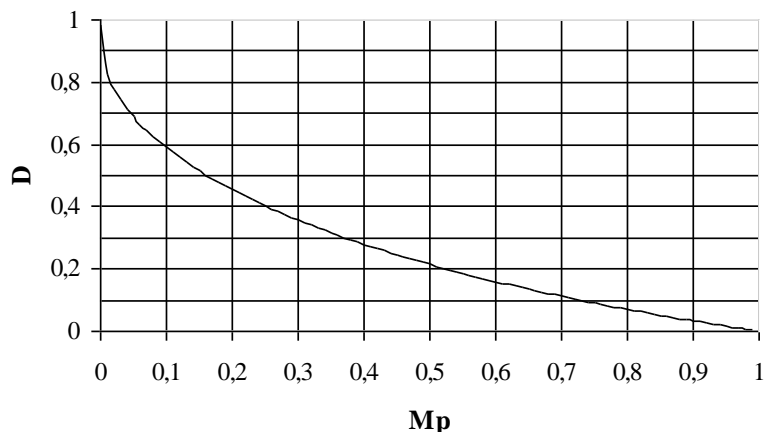
(3)

Többnyire a fordított feladat merül fel, amikor előírt túllövésből kell kiszámítanunk a rendszer szükséges csillapítását.

$$D = \frac{|\ln M_p|}{\sqrt{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}$$

(4)

A csillapítás és túllövés közötti kapcsolat a 3. ábrán látható.



3. ábra. A túllövés és a csillapítás kapcsolata

b) A beállási idő és a σ kapcsolata

Legegyszerűbben az átmeneti függvény burkológörbéje és a hibahatárnál ($h_1 = \pm 1\%$, $h_2 = \pm 2\%$, $h_5 = \pm 5\%$) húzott vízszintes egyenes metszéspontjaként számíthatjuk.

Az alsó burkológörbe és az alsó hibahatár metszéspontja az

$$1 - e^{-\sigma t_s} = 1 - h$$

egyenlettel számítható. A beállási időt kifejezve

$$t_s = -\frac{\ln h}{\sigma}$$

Különböző hibahatárokra a beállási idő értékét a táblázatban láthatjuk

h	t_s (s)
1%	$\frac{4,6}{\sigma}$
2%	$\frac{4}{\sigma}$
5%	$\frac{3}{\sigma}$

c) Emelkedési idő

Az emelkedési idő számítása bonyolult és nagyban függ a rendszer csillapításától, ezért levezetés helyett csupán a végeredményt közöljük, mely csupán nagyságrendi becslésre alkalmas.

$$t_r = \frac{1,8}{\omega_n}$$

(5)

c) Stabilitás

Nem állapítható meg közvetlen kapcsolat, bár ismert tény, hogy a másodrendű rendszer mindig stabil (strukturális stabilitás!)

A normál alak vizsgálatának hátránya, hogy magasabb rendű rendszerek nem vizsgálhatók vele! Ez a legfőbb indoka a következő módszer alkalmazásának.

2) A minőségi követelmények kapcsolata a rendszer pólusaival

Szabályozási körök vizsgálata úgy is történhet, hogy az átviteli függvényt a

$$T(s) = \frac{k}{s^2 + 2D\alpha s + \alpha^2} = \frac{k_3}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (6)$$

ún. „gyöktényező” alakra hozzuk. Az s_1 és s_2 gyöktényezők (pólusok) lehetnek valós és komplex számok is, jelentésük valós vagy komplex körfrekvencia. Aktuális értékükből fontos következtetéseket vonhatunk le a szabályozás időtartománybeli viselkedésére és **stabilitására** nézve is.

Figyelem! A másodfokú egyenlet $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$ gyöktényező alakja középiskolás tananyag!

Előző tanulmányainkból ismeretes, hogy a rendszeregyenlet időtartománybeli megoldásakor a pólusoknak kitüntetett szerepe van, hiszen a homogén differenciálegyenlet megoldása (a tranziens rezgés) a pólusokkal kifejezve másodrendű rendszer esetében

$$x_h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (7)$$

alakú.

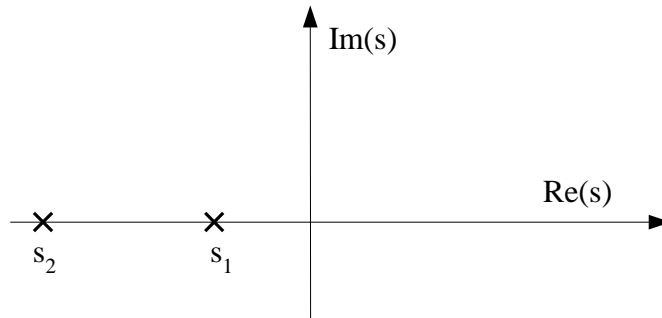
Az s_1 és s_2 pólusok meghatározása érdekében az átviteli függvény $s^2 + 2D\alpha s + \alpha^2$ nevezőjét zérussal tesszük egyenlővé, majd s -re megoldjuk az így kapott másodfokú egyenletet. A kapott gyökök (pólusok) rendre

$$\begin{aligned} s_1 &= -D\alpha + \alpha\sqrt{D^2 - 1} \\ s_2 &= -D\alpha - \alpha\sqrt{D^2 - 1} \end{aligned} \quad (8)$$

A rendszer D csillapításától függően két merőben eltérő eset lehetséges.

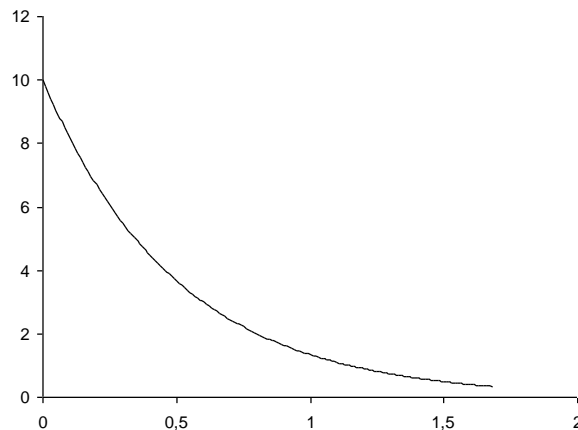
1. eset: $D \geq 0$ Túlcillapított rendszer. Valós pólusok. Beállítás lengés nélkül

A gyök alatti $(D^2 - 1)$ kifejezés pozitív, ezért a pólusok valósak. Az átviteli függvény (6) alakban írható, ahol az $s_1 = -1/T_1$ és $s_2 = -1/T_2$ pólusok valós számok (az időállandók reciprokai). A pólusok a komplex számsík valós tengelyén helyezkednek el. A pólusokat egyezményesen x -szel jelöljük (4. ábra).



4.ábra. Valós pólusok elhelyezkedése a komplex számsíkon

A szabályozó kör válaszelének tranziens része két exponenciális függvény összege az (5) szerint, tehát ha a pólusok negatív valós számok, a kifejezés fokozatosan zérushoz tart. A szabályozás stabil, mert a zavarásra adott válasz lengés kialakulása nélkül, exponenciálisan csökkenve elhal (5. ábra).



5. ábra. A tranziens valós pólusok esetén

2. eset: $D < 0$. Lengőképes rendszer. Konjugált komplex pólusok

Ekkor (8) kifejezésében a négyzetgyök alatt negatív szám áll, a pólusok ezért komplex számok lesznek:

$$s_1 = -D\alpha + j\alpha\sqrt{1-D^2} = -\sigma + j\omega_d$$

$$s_2 = -D\alpha - j\alpha\sqrt{1-D^2} = -\sigma - j\omega_d \tag{9}$$

Itt

$$\sigma = D\alpha \tag{10}$$

a pólusok valós részének abszolút értéke, a tranziens csillapodására jellemző körfrekvencia, rad/s). Másrészt

$$\omega_d = \alpha\sqrt{1-D^2} \tag{11}$$

a lengések ténylegesen mérhető, ún. csillapított sajátfrekvenciája, rad/s.

A komplex pólusok mindig párosan jelentkeznek (konjugált komplex pólusok), elhelyezkedésük szimmetrikus a komplex számsík valós tengelyére nézve (6. ábra).

Emeljük négyzetre és adjuk össze a (8) és (9) kifejezést:

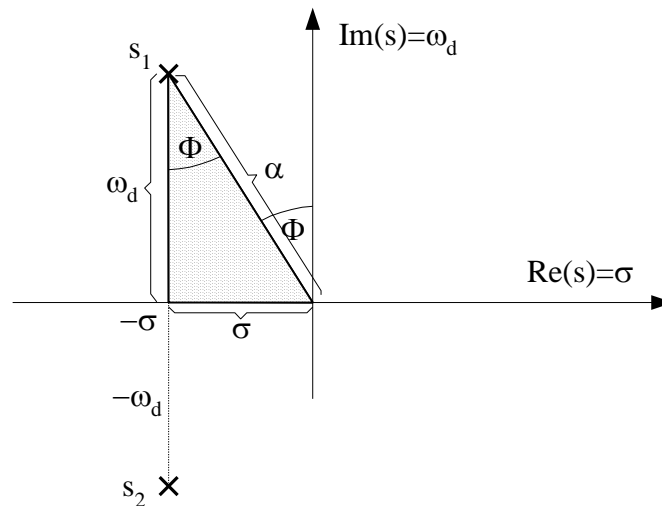
$$\sigma^2 + \omega_d^2 = (D\alpha)^2 + \alpha^2(1 - D^2) = \alpha^2$$

I. következtetés

A csillapított sajátfrekvencia, a tranziens lecsengésére jellemző körfrekvencia, valamint a csillapítatlan sajátfrekvencia között a

$$\sigma^2 + \omega_d^2 = \alpha^2 \tag{12}$$

Pythagorasz-tétel teremt kapcsolatot.



6. ábra. A pólusok elhelyezkedése a komplex számsíkon

A 6. ábra derékszögű háromszögében felírva a pólushoz húzott sugár szögének szinuszát

$$\sin \Phi = \frac{\sigma}{\alpha} = D$$

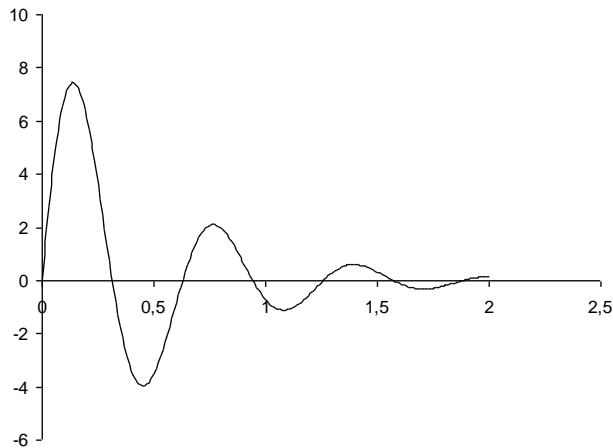
II. következtetés:

A Lehr-csillapítás és a pólushoz húzott sugár hajlásszöge között a

$$\Phi = \arcsin D \tag{13}$$

összefüggés áll fenn.

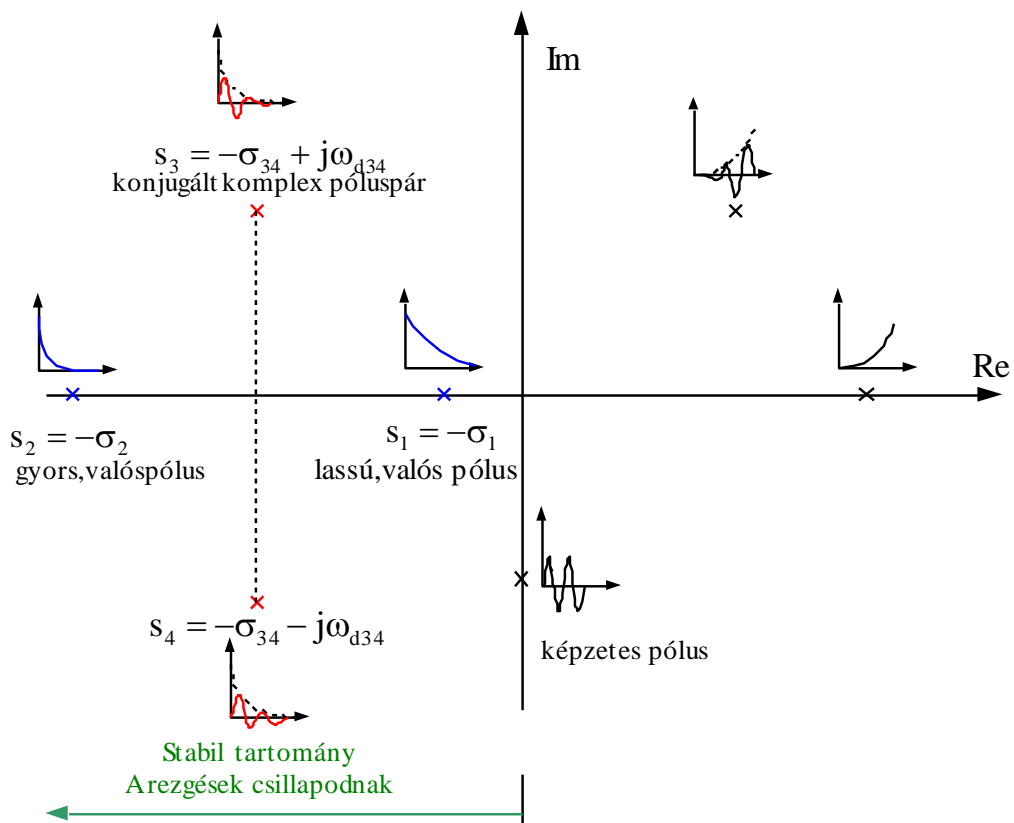
A rendszer tranziens válasza $v(t) = Ae^{-\sigma t} (\sin \omega_d t + \varphi)$ alakú, mely negatív kitevő esetén oszcillálva zérushoz tart, a szabályozás tehát stabil (7. ábra).



7. ábra. A tranziens komplex pólusok esetén

Összefoglalva kijelenthető, hogy

- A szabályozás akkor **stabil**, ha a **pólusok valós része negatív** (pólus a bal félsíkon)
- Valós pólusok exponenciálisan változó, lengésmentes beállást okoznak
- Minél messzebb van a pólus a képzetes tengelytől, annál gyorsabb a beállítás
- Minél közelebb van a pólus a képzetes tengelyhez, annál lassabb a beállítás (domináns pólus)
- Komplex pólusok oszcilláló beállást okoznak
- Minél távolabb van a komplex pólus a valós tengelytől, annál gyorsabban oszcillál a válaszjel



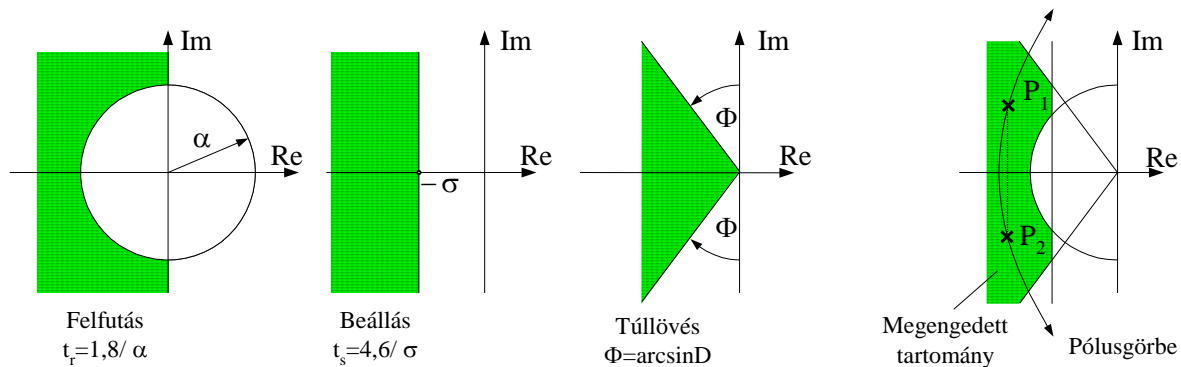
8. ábra. A pólusok helye és a tranziens lefutása közötti kapcsolat

A lengőképes ($D < 1$) másodrendű rendszerre levezetett minőségi követelmények szoros kapcsolatban állnak a pólusok elhelyezkedésével. A gyakorlatban a feladat úgy merül fel, hogy a pólusokat alkalmas helyre kell elhelyezni annak érdekében, hogy a szabályozás a megadott minőségi követelményeket teljesítse. A stabilitás teljesítéséhez eleve csak a komplex számsík bal oldalára eső pólusokat engedélyezzük.

A felfutási idő feltétel szerint a pólusoknak az origó körül rajzolt

$$\alpha = 1,8/t_r \quad (14)$$

sugarú körön kívül kell esniük (9/a ábra).



9. ábra. A pólusok megengedett helyei

A beállási idő feltétel szerint a pólusoknak a

$$\sigma = -4,6/t_s \quad (15)$$

egyenestől balra kell elhelyezkedniük (9/b ábra).

A túllövési feltétel egyértelmű kapcsolatban áll a rendszer csillapításával. A pólusoknak a képzetes tengellyel

$$\Phi = \arcsin D = \arcsin \frac{|\ln M_p|}{\sqrt{(\ln M_p)^2 + \pi^2}} \quad (16)$$

szöget bezáró határvonalú szögtartományon belül kell elhelyezkedniük (9/c ábra).

Több minőségi feltétel egyidejű teljesítéséhez az egyes megengedett tartományok közös részét kell venni. A pólusok valamely paraméter (pl. a szabályozó erősítése) változtatásakor csak a megengedett tartományon belül változtathatják helyüket. (lásd később „Gyök helygörcbe módszer”)

FONTOS! Magasabb rendű (harmad-,negyed,...n-ed rendű) átviteli függvénnyel jellemzett szabályozás vizsgálatkor a pólusokat csak számítógéppel, numerikus módszerek alkalmazásával lehetséges meghatározni. Ennek hiányában csak a két domináns (origóhoz legközelebbi) pólust vizsgáljuk.

Példa

Adott egy szabályozás az alábbi specifikációval:

$$t_r \leq 0,1 \text{ s}$$

$$t_s \leq 0,2 \text{ s}$$

$$M_p \leq 10\% \quad (D=0,6)$$

Határozzuk meg a pólusok megengedett elhelyezkedési tartományát a komplex számsíkon!

Az emelkedési idő feltételből a sajátfrekvencia

$$\omega_n \geq \frac{1,8}{0,1} = 18 \text{ 1/s.}$$

A pólusoknak a 18 1/s ugarú körön kívül kell elhelyezkedni.

A beállási idő feltétel szerint a pólusoknak balra kell elhelyezkedni a $\sigma = -15,3$ egyenestől.

$$-\sigma \leq \frac{4,6}{0,3} = 15,3 \text{ 1/s}$$

Végül a túllövés feltételből a pólusoknak a

$$\Phi = \arcsin 0,6 = 36,9^\circ$$

szögtartományon belül kell elhelyezkedniük. A mindhárom követelményt kielégítő pólusok az ábrán jelölt tartományon belül esnek.

