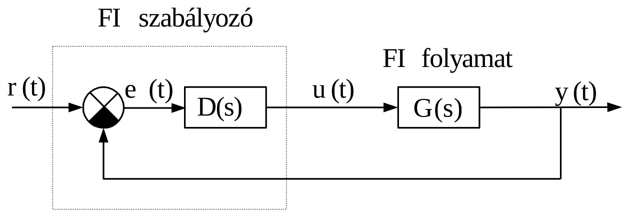
Digitális szabályozás

Eddig a folyamatos idejű (FI) szabályozással foglalkoztunk, ahol mind a folyamat, mind a szabályozó folyamatos idejű volt. Az ábrán szaggatott vonallal jelölt folyamatos idejű szabályozó azonnal reagált a szabályozott jellemző legkisebb megváltozására, ugyanakkor csak viszonylag egyszerű feladatok ellátására volt képes, mivel az analóg elektronikus áramkörökkel való realizáció bonyolultabb műveletek végrehajtását nem tette lehetővé.



Folyamatos idejű (FI) szabályozás blokkvázlata

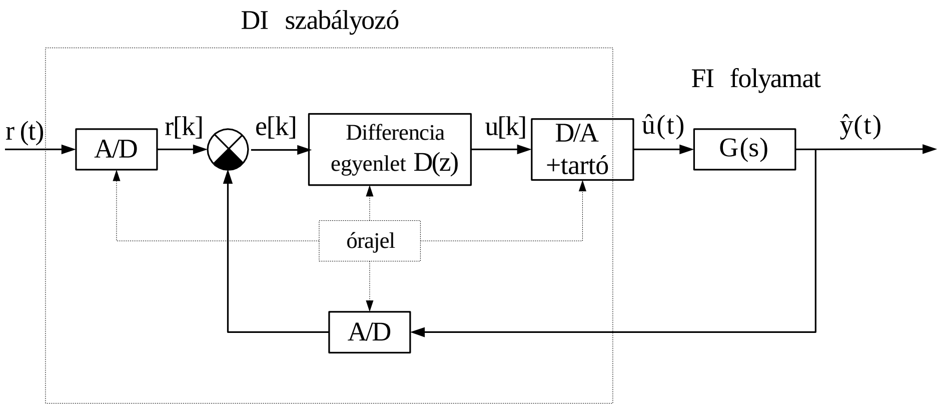
A FI szabályozó helyettesíthető diszkrét idejű (DI) digitális szabályozóval, ami alapvetően ugyanazt a feladatot látja el, mint a folyamatos szabályozó, csak magasabb szinten. Az alapvető működésbeli különbség abban rejlik, hogy a digitális rendszer a folyamatos jelekből mintákat vesz és azokat numerikusan, aritmetikai és logikai műveletekkel dolgozza fel. Ebből következik a mintavételes rendszer előnye: nagyon változatos és bonyolult szabályozási algoritmusok futtathatók a szabályozóként használt számítógépen. A megváltozott igényeknek megfelelően a programok egyszerűen módosíthatók, vagy igényesebb esetekben maguktól módosulnak (adaptív és tanuló szabályozások).

Mint ismeretes, a mechatronikai elvű berendezések információs rendszerét alkotó buszrendszerben a jelek időosztásos módon, digitális formában terjednek. Ez a tény szintén a digitális szabályozás mellett szól.

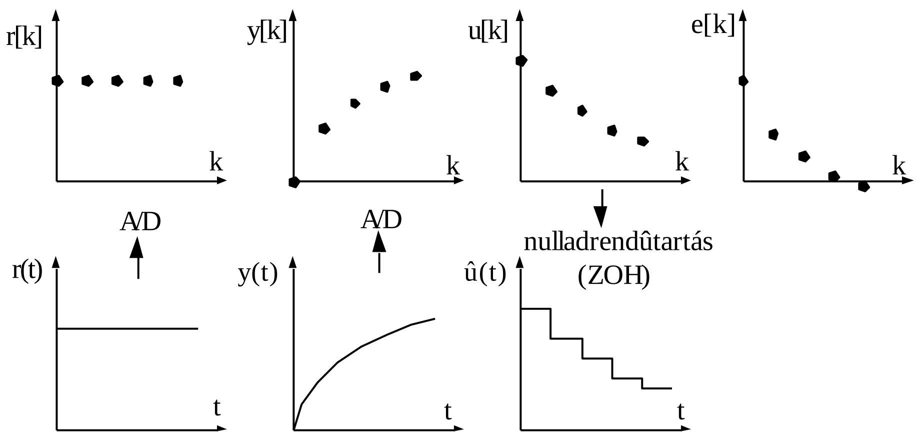
A digitális szabályozásnak azonban van hátrányos tulajdonsága is. Egy-egy minta feldolgozásához, vagyis a beavatkozójel kiszámításához a számítógépnek véges időre van szüksége, ami korlátozza a mintavételi frekvenciát. A mintavételek között a beavatkozójel nem változik, mivel sem a szabályozott jellemző, sem az alapjel mintavételezett értéke nem változik. Két mintavétel között nem érvényesül a visszacsatolás hatása, a rendszer a mintavételi időpontok között mintegy „vakon repül". A jelenség matematikailag a T_h holtidő figyelembevételével kezelhető. Mint minden holtidős rendszer, így a mintavételes szabályozás is hajlamos az instabilitásra, ezért tervezése fokozott körültekintést és kellő ismeretet igényel.

Fontos megjegyezni, hogy maga a szabályozandó folyamat folyamatos jellege - mint objektív adottság - digitális szabályozáskor sem változik.

Az alábbi ábrán a digitális szabályozási rendszer felépítése és tipikus jelalakjai láthatók.



A digitális szabályozás felépítése



Tipikus jelek digitális szabályozáskor

A mintavételes rendszerben folytonos (analóg) és digitális jelek egyaránt jelen vannak, ezért azok kölcsönös átalakítása elkerülhetetlen. A jelek átalakítását A/D és D/A átalakítók (konverterek) végzik

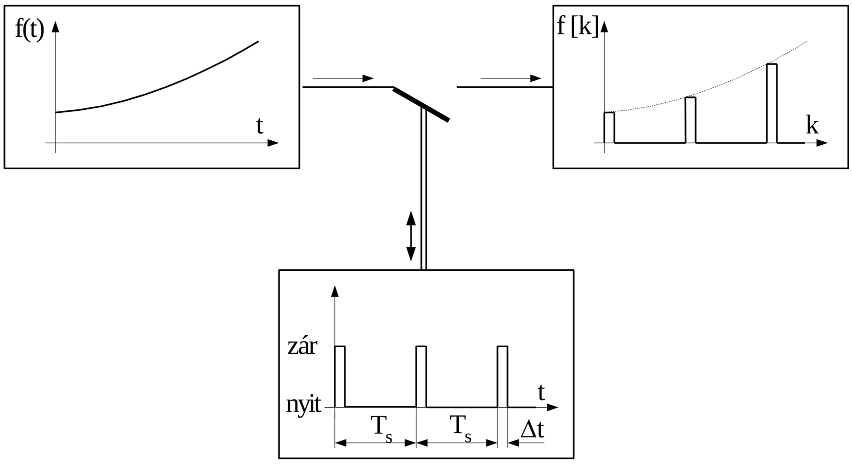
Mintavételezés és A/D átalakítás

A folytonos jelből szakaszos bináris jel előállítását az A/D átalakító végzi. Az átalakítás mintavételből és kvantálásból („kerekítésből") áll.

A mintavételkor a folytonos jelből T_s (sampling time) egyenközű (ekvidisztáns) időközönként mintát veszünk, így a minták „k" sorszáma szerint indexezett adatsort kapunk. Például az alapjel egymást követő értékei r[1], r[2],…r[k]. Megkülönböztetünk matematikai és fizikai mintavételezést. A matematikai mintavételezés szolgáltatja az elméleti alapot a mintavételes rendszerek elméletéhez, míg a fizikai mintavételezés áll közelebb a gyakorlatban alkalmazott mintavételezési eljáráshoz.

A valós mintavételezési folyamatot a „**fizikai mintavételezés**" elnevezéssel különböztetjük meg a matematikai mintavételezéstől. A folytonos jelet a T_s mintavételezési időközönként csak nagyon rövid Δt időre engedjük a kimenetre jutni egy elektronikus kapcsoló (pl.

tranzisztor) zárásával. Amennyiben a Δt idő nagyon kicsi a mintavételi időhöz képest, a fizikai mintavételezés jól közelíti a matematikai mintavételezést.

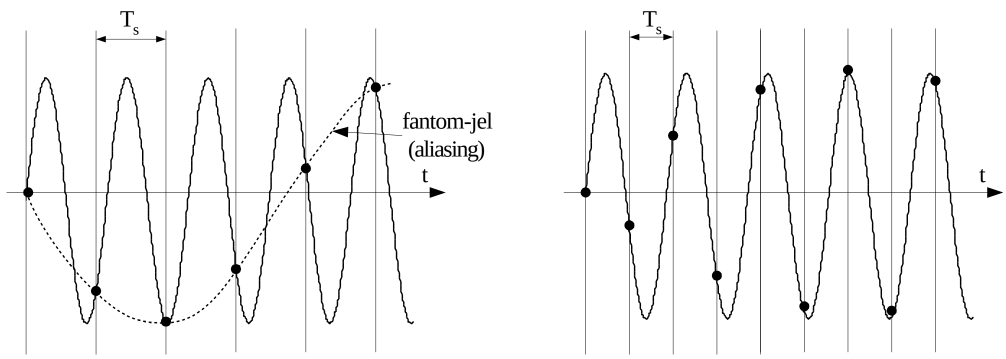


A mintavételi időnek alkalmazkodnia kell a folyamat időállandójához: gyorsan változó folyamatokat sűrűbben kell mintavételezni. Számszerű korlátot a **Shannon**-féle mintavételezési elv szab. Képzeljük el, hogy a mintavételezni kívánt jel legmagasabb frekvencia-összetevője (sávszélessége) ω_{max}. A mintavételi frekvenciának legalább kétszer akkorának kell lenni, mint jel legmagasabb felharmonikus összetevőjének a frekvenciája, hogy a jelet vissza lehessen állítani és átlapolódási jelenség (aliasing), fantom jel ne jelenjen meg. A Shannon-elv szerint a mintavételezési körftrekvencia

$$\boxed{\omega_s > 2\omega_{max}}$$

illetőleg a mintavételi idővel megfogalmazva

$$T_s < \frac{\pi}{\omega_{max}}$$

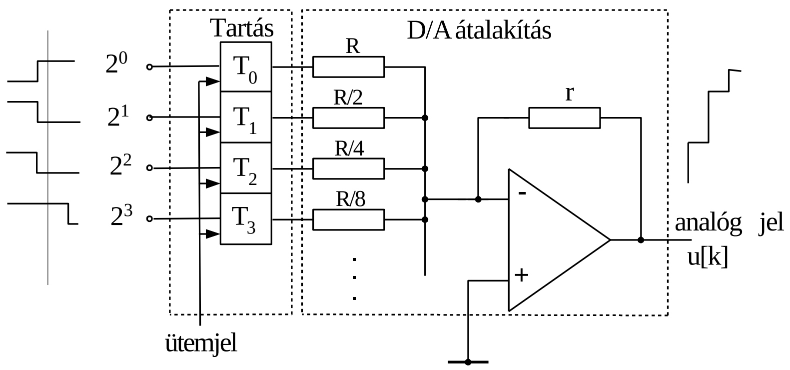


Helytelenül és helyesen megválasztott mintavételi idő

A valóságban nehéz szavatolni, hogy egy zajos jelnek mekkora a legmagasabb frekvencia összetevője, ezért a jelet mintavétel előtt sávkorlátozni (szűrni) kell. Ezt legegyszerűbben egy analóg vagy digitális aluláteresztő szűrővel tehetjük meg, melynek törésponti frekvenciája kisebb, mint $\omega_s/2$.

D/A átalakítás és tartás

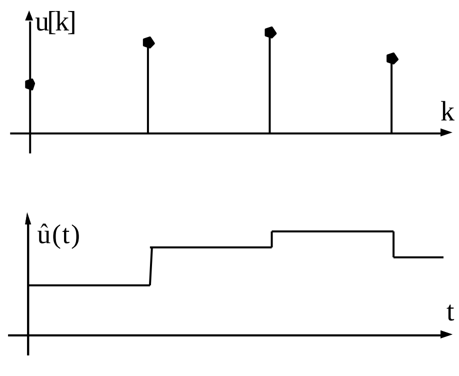
A digitális szabályozó kimenetén T_s időközönként megjelenő $u[k]_2$ beavatkozó jel a digitális számítógép működéséből adódóan egy 8, 12, 16, …bit hosszúságú binális szám. Két fontos feladatot kell teljesíteni: a binárisan kódolt jelet dekódolni kell analóg jellé, valamint időben folyamatossá kell tenni



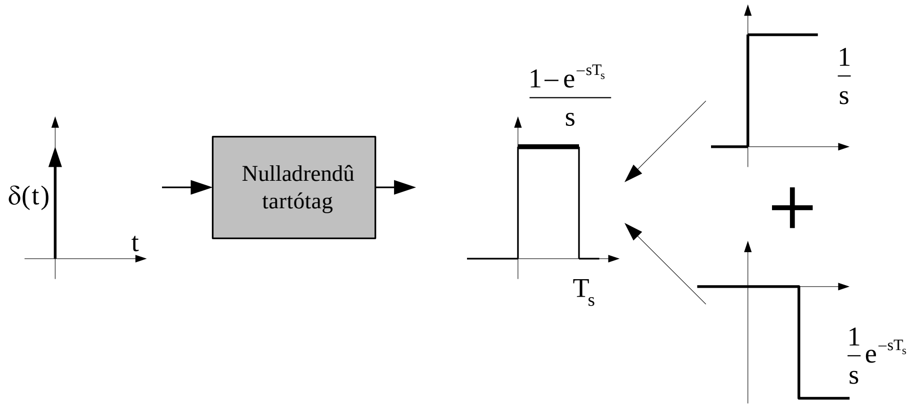
D/A átalakító megvalósítása műveleti erősítő összegző kapcsolással

A jel folyamatossá tételéről a **tartószerv** gondoskodik. **A** leggyakrabban ún. „**nulladrendű tartószervet**" (Zero Order Hold=ZOH) alkalmaznak, mely a jelet a mintavételi időpontok között állandó értéken tartja. A tartás történhet a D/A átalakítás előtt és után is.

A D/A átalakítást egy műveleti erősítő összegző kapcsolásával is meg lehet oldani, amint az az ábrán látható. A D/A+ZOH művelet hatásának eredménye egy folytonos lépcsős jel, melyet felül kalappal jelölünk.



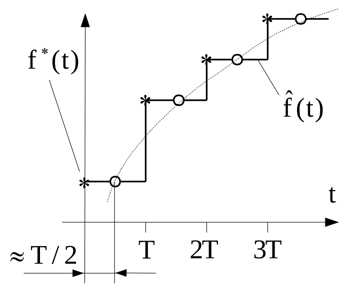
A D/A+ZOH művelet hatására a jel kissé módosul, melyet a következő gondolatmenettel láthatunk be. A nulladrendű tartótag a bemenetére érkező impulzusból egy T_s időtartamú ugrásfüggvényt állít elő, mely egy pozitív és egy eltolt negatív ugrásfüggvény összegeként fogható fel.



A ZOH átviteli függvénye a kimenet és a bemenet Laplace-transzformáltjának hányadosa. Mivel a bemenő impulzus Laplace-transzformáltja 1, ezért a nulladrendű tartótag átviteli függvénye és annak Taylor-sorral való közelítése a következő:

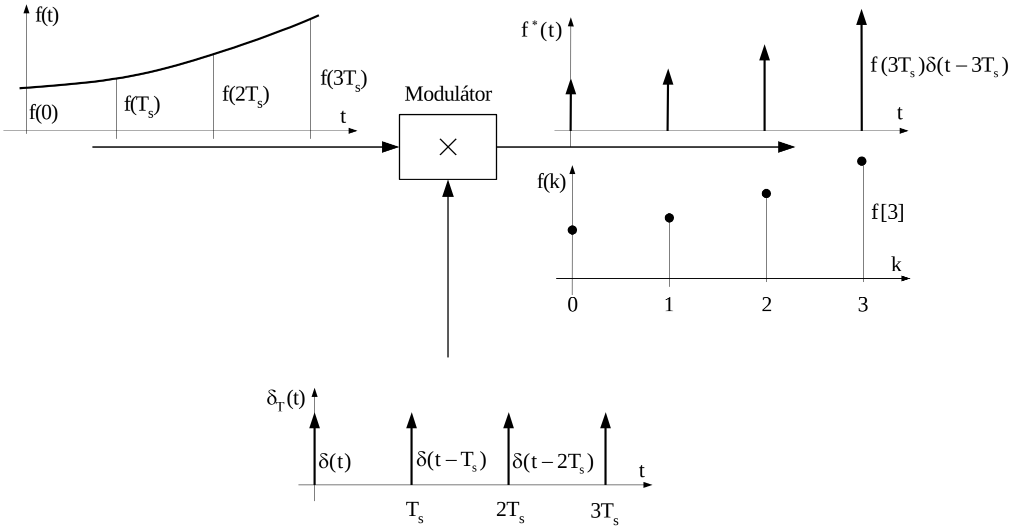
$$W_{ZOH}(s) = \frac{1-e^{-sT_s}}{s} \cong \frac{1-\overbrace{(1-sT_s+\frac{s^2T_s^2}{2}-+....)}^{\text{Taylor-sor}}}{s} = T_s(1-\frac{sT_s}{2}+...) = T_s e^{-\frac{sT_s}{2}}.$$

<u>A nulladrendű tartótag tehát közelítőleg $T_S/2$ holtidőt visz be a rendszerbe</u> (a jelet késlelteti), ami a fázistartalékot csökkenti. A tartótag és a folyamat eredő átviteli függvénye a folyamatos rendszereknél megszokott módon, az átviteli függvények $W_{ZOH}(s)G(s)$ összeszorzásával képezhető.



A mintavételezés matematikai tárgyalása: a $\mathcal{Z}$-transzformáció

A mintavételes rendszerek korrekt matematikai kezelésének alapját a matematikai mintavételezés teremti meg. A **matematikai** mintavételezéskor az f(t) folytonos jellel moduláljuk az időben T_s mintavételi idővel eltolt egységimpulzusokból álló $\delta_T(t)$ jelsorozatot. (Moduláció=a két jelet összeszorozzuk).



Jelöljük *-gal a mintavételezett függvényt! Az eredményül kapott $f^*(t)$ mintavételezett függvény a következő:

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T_s)\delta(t - T_s) + f(2T_s)\delta(t - 2T_s) + \ldots.. = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

A mintavételezett függvény csak a $t=kT_s$ mintavételi időpillanatokban vesz fel zérustól különböző értéket.

A folytonos rendszerek tárgyalásánál láttuk, hogy Laplace-transzformáció alkalmazása mennyire megkönnyítette a tárgyalásmódot. Ennek mintájára próbálkozzunk meg a mintavételezett függvények Laplace-transzformációjával. A matematikailag mintavételezett $f^*(t)$ függvény Laplace-transzformáltjának kiszámításához felhasználjuk a tetszőleges nT_s idővel eltolt impulzus Laplace-transzformáltjának

$$\mathcal{L}(\delta(t - nT_s)) = e^{-snT_s}$$

összefüggését, valamint azt a tényt, hogy az egyes $f(nT_s)$ mintavett értékek konstansok. Tagonként elvégezve a Laplace-transzformációt a következő eredményt kapjuk:

$$\mathcal{L}(f^*(t)) = f(0) + f(T_s)e^{-sT_s} + f(2T_s)e^{-2sT_s} + \ldots. = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)e^{-ksT_s}$$

Vezessük be a

$$\boxed{z = e^{sT_s}}$$

új változót, ezzel

$$\mathcal{L}(f^*(t)) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)z^{-k}$$

Jelöljük a k-dik mintavételezett függvényértéket az $f[k]=f(kT_s)$ szimbólummal, ekkor a mintavételezett adatsor Laplace-transzformáltja (az eredeti függvény Z-transzformáltja)

$$\boxed{F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}}$$

Egy mintavételezett függvény $\mathcal{Z}$-transzformáltja egy olyan végtelen sorozattal írható le, ahol a negatív kitevős hatványfüggvények együtthatói a függvény egymást követő mintavett értékei.

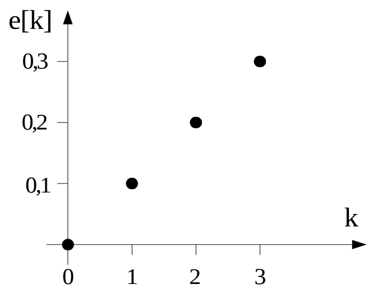
Példa

Mintavételezzük az e(t)=t·1(t) sebességugrás-függvényt T_s=0,1s mintavételi idővel. Írjuk fel az így keletkezett $e^*(t)$ függvény

a) $\mathcal{Z}$-transzformáltjának első néhány tagját

b) a $\mathcal{Z}$-transzformált zárt alakú összefüggését!

ad a)
A sebesség-ugrás függvény egymást követő mintái rendre e[0]=0; e[1]=T_s; e[2]=2T_s; e[3]=3T_s; …..(ábra)



A mintavételezett függvény $\mathcal{Z}$-transzformáltjának tagjai formálisan úgy írhatók fel, hogy az egymást követő mintavételezett függvényértékeket szorozzuk „z" negatív kitevős hatványaival úgy, hogy a kitevő a minta sorszámával egyezzen meg:

$$E(z)=T_s z^{-1}+2T_s z^{-2}+3T_s z^{-3}+.....$$

ad b)
Ennek a végtelen sornak az összege zárt alakban is felírható. Vezessük be a mértani soroknál szokásos $q=z^{-1}$ jelölést. Ezzel

$$E(z)=T_s(q+2q^2+3q^3+4q^4+......)$$

Ismeretes a középiskolai tanulmányokból, hogy a végtelen mértani sor összege

$$1+q+q^2+q^3+.....=\frac{1}{1-q} \qquad \text{ha } |q|<1.$$

A problémát most az jelenti, hogy a sor tagjainak együtthatói különbözőek. Ezért a sor tagjait csoportosítsuk úgy, hogy soronként képezhessük az összegüket:

$$
\begin{array}{lll}
T_s(q+\boxed{q^2}+\boxed{q^3}+q^4+\ldots\ldots & & \to T_s q\dfrac{1}{1-q} \\
\quad +T_s(\boxed{q^2}+\boxed{q^3}+q^4+\ldots\ldots & & \to T_s q^2\dfrac{1}{1-q} \\
\qquad +T_s(\boxed{q^3}+q^4+\ldots\ldots & & \to T_s q^3\dfrac{1}{1-q} \\
+ & & \ldots\ldots \\
\hline
\end{array}
$$

$$T_s(q+2q^2+3q^3+4q^4+\ldots)=T_s q\frac{1+q+q^2+q^3+\ldots}{1-q}=T_s q\frac{\frac{1}{1-q}}{1-q}=\frac{T_s q}{(1-q)^2}$$

Az eredeti jelöléssel az $e^*(t)$ sebességugrás-függvény z-transzformáltja a következő:

$$E(z)=\frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt z^2-tel, ekkor az ismertebb formulát kapjuk:

$$E(z)=\frac{T_s z}{(z-1)^2}$$

Hasonló módon határozhatók meg egyéb függvények z-transzformáltjai is, melyeket a táblázatban láthatunk.

Példa

Határozzuk meg a T_s idővel mintavételezett $f(t)=e^{-at}$ függvény z-transzformáltját!

Az f(t) függvény mintavételezése után kapott f*(t) függvény a következő tagokból áll:

$$
\begin{aligned}
f^*(t)&=f(0)\delta(t)+f(T_s)\delta(t-T_s)+f(2T_s)\delta(t-2T_s)+\ldots..= \\
&=\underbrace{e^{-a0}}_{1}\cdot\delta(t)+e^{-aT_s}\delta(t-T_s)+e^{-a2T_s}\delta(t-2T_s)+\ldots+e^{-akT_s}\delta(t-kT_s)
\end{aligned}
$$

A mintavételezett függvény Laplace-transzformáltja (az eredeti f(t) függvény z-transzformáltja) a következő végtelen sorral írható le:

$$F(z)=1+e^{-aT_s}z^{-1}+e^{-a2T_s}z^{-2}+\ldots+e^{-akT_s}z^{-k}\ldots=1+(e^{-aT_s}z^{-1})^1+(e^{-aT_s}z^{-1})^2+(e^{-aT_s}z^{-1})^3+\ldots..$$

Könnyen felismerhető, hogy ismét egy végtelen mértani sor összegét kell meghatároznunk:

$$F(z) = \frac{1}{1-(e^{-aT_s}z^{-1})} = \frac{z}{z-e^{-aT_s}}$$

TÁBLÁZAT

f(t)	F(s)	$f^*(z) = F(z)$
1(t)	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t\cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_s z}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_s}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T_s}{z^2-2z\cos\omega T_s+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T_s)}{z^2-2z\cos\omega T_s+1}$

A táblázatot szemlélve néhány fontos következtetést vonhatunk le:

1) a $\mathcal{Z}$-transzformáltak különböznek a Laplace-transzformáltaktól, nem képezhetők s=z helyettesítéssel! *

2) a $\mathcal{Z}$-transzformáltak kifejezései bonyolultak, ezért a visszatranszformáláskor a parciális törtekre bontás módszerével csak ritkán lehetséges olyan alakot találni, mely a táblázatban megtalálható. A gyakorlatban a visszatranszformálást számítógép segítségével, numerikus módszerekkel (pl. polinom-osztással=long division) végzik. Az analitikus vizsgálatoknak inkább a szabályozási kör minőségi vizsgálataikor (pl. állandósult hiba meghatározása) van jelentőségük.

3) a $\mathcal{Z}$-transzormáltak a mintavételi időtől is függenek!

* Számos közelítő digitalizáló módszer létezik (pl. Tustin-féle Bilineáris transzformáció, melynél az $s \approx \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}$ helyettesítéssel az átviteli függvényből közvetlenül megkaphatjuk a közelítő $\mathcal{Z}$-transzformáltat).

A z-transzformáció fontosabb tulajdonságai

►*Konstanssal szorzás*

Legyen az „g" függvény az „f" függvény c-szerese: g[k]=cf[k], (k=0,1,2,…)

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} cf[k]z^{-k} = cF(z)$$

Az eredmény: a „g"függvény z-transzformáltja az „f" függvény z-transzformáltjának c-szerese.

►*Linearitás*

$$\mathcal{Z}\{cf[k]+dg[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\{cf[k]+dg[k]\}z^{-k}=cF(z)+dG(z)$$

Két jel lineáris kombinációjának z-transzformáltja egyenlő a jelek z-transzformáltjainak ugyanazon lineáris kombinációjával.

►*Eltolási tétel (késleltelés)*

Az f[k] jel időben n (n=pozitív egész) mintával késleltetett f[k-n] alakjának Z-transzformáltját keressük. Vezessük be az m=k-n változót. Definíciószerűen m<0 értékekre f[m]=0. A szummázást negatív k kitevő esetén k=0 és ∞ között kell elvégezni. Áttérve az m változóra, a szummázást m=k-n=0-n negatív értéknél kellene kezdeni, melyekre azonban f[m]=0, ezért a szummázást elég m=0 értéknél kezdeni.

$$\mathcal{Z}\{f[k-n]\}=\sum_{k=0}^{\infty}f[m]z^{-k}=z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty}f[m]z^{-m}=z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}f[m]z^{-m}=z^{-n}F(z)$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\{f[k-n]\}=z^{-n}F(z)}$$

Nagyon fontos és gyakran alkalmazott összefüggést kaptunk. **Az *eltolási tétel* szerint z^{-1}-gyel való szorzás egy lépésköznyi jelkésleltetést jelent!**

►*Végérték tétel*

Egy sor utolsó tagját (amit a sor végtelen idő múlva ér el) úgy kapjuk, ha a sor összegéből levonjuk az eggyel kevesebb tagot tartalmazó sor összegét. Az eggyel kevesebb tagot tartalmazó sort úgy állíthatjuk elő, hogy a sort eggyel késleltetjük.

$$\lim_{k\to\infty}f[k]=\lim_{z\to1}\{F(z)-z^{-1}F(z)\}=\lim_{z\to1}\{F(z)(1-z^{-1})\}=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

Példa

Határozzuk meg az $y^*(t)=e^{-akT}$ mintavételezett függvény végtelenben vett határértékét $k\to\infty$ esetén!

A vizsgált függvény $\mathcal{Z}$-transzformáltja a táblázatból

$$Y(z)=\frac{z}{z-e^{-aT}}.$$

A diszkrét függvényekre vonatkozó végértéktétel alkalmazásával

$$\lim_{k\to\infty}y[k]=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}\cdot Y(z)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z}{z-e^{-aT}}=\underline{\underline{0}}$$

Impulzus-átviteli függvény

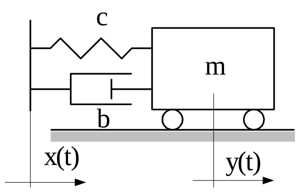
Eddig csupán mintavételezett függvények $\mathcal{Z}$-transzformáltjaival foglalkoztunk. A mintavételes szabályozási körben azonban nem csak jelek, hanem „jelátalakítók” is vannak. Vannak olyanok, melyek megváltoztatják a jel fajtáját (A/D és D/A átalakítók), és vannak olyanok, melyek a jel fajtáját nem befolyásolják, csak a jelek nagyságát. Ilyen például maga a szabályozó szerv is (a számítógép), mely a mintavett (DI) rendelkező jelből digitális (DI) beavatkozójelet állít elő. A szabályozási kör egyes tagjait a folytonos szabályozásokban átviteli függvényükkel jellemeztük. Ennek mintájára bevezethetjük az egyes tagok (szervek) **impulzus-átviteli függvényének** fogalmát, mely a tag kimenőjele és bemenőjele z-transzformáltjának hányadosával egyenlő. A szabályozó impulzus-átviteli függvénye tehát

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)}.$$

Az impulzus-átviteli függvény törtfüggvény, melynek számlálója és nevezője is z hatványfüggvénye.

Példa

Legyen a folyamat egy x(t) útgerjesztésű lengőrendszer (pl. autó futóművének modellje), melynek y(t) kimenete az m tömeg elmozdulása.



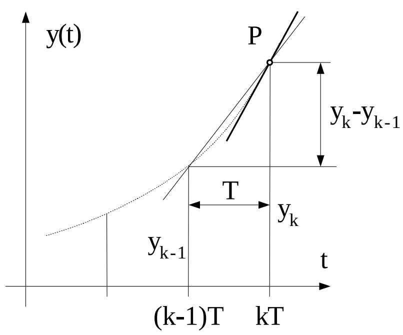
A mozgásegyenlet

$$c(x-y) + b\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Rendezés után a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = cx + b\frac{dx}{dt}$$

A deriváltakat differenciahányadosokkal helyettesítjük Euler-szerint



$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=kT} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_k}{T_s^2}$$

$$m\frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2} + b\frac{y_k - y_{k-1}}{T} + cy_k = cx_k + b\frac{x_k - x_{k-1}}{T}$$

Vonjuk össze a tagokat:

$$y_k + \underbrace{\frac{-2m - bT}{m + bt + cT^2}}_{a_1} \cdot y_{k-1} + \underbrace{\frac{bT}{m + bt + cT^2}}_{a_2} \cdot y_{k-2} = \underbrace{\frac{cT^2 + bT}{m + bt + cT^2}}_{b_0} \cdot x_k + \underbrace{\frac{-bT}{m + bt + cT^2}}_{b_1} \cdot x_{k-1}$$

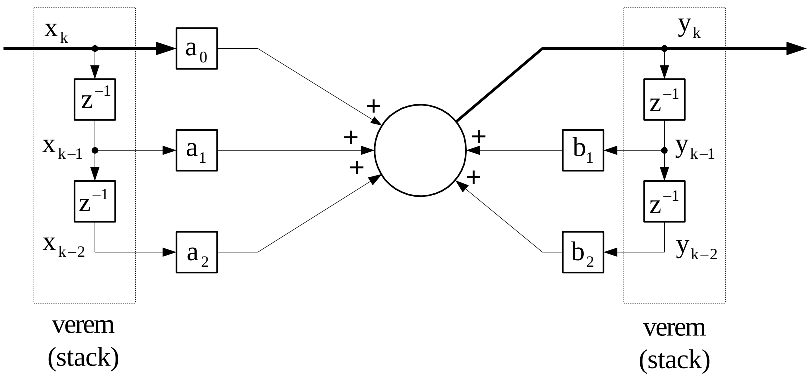
Vegyük mindkét oldal z-transzformáltját, miközben az eltolási tételt alkalmazzuk:

$$Y(z)(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) = X(z)(b_0 + b_1z^{-1})$$

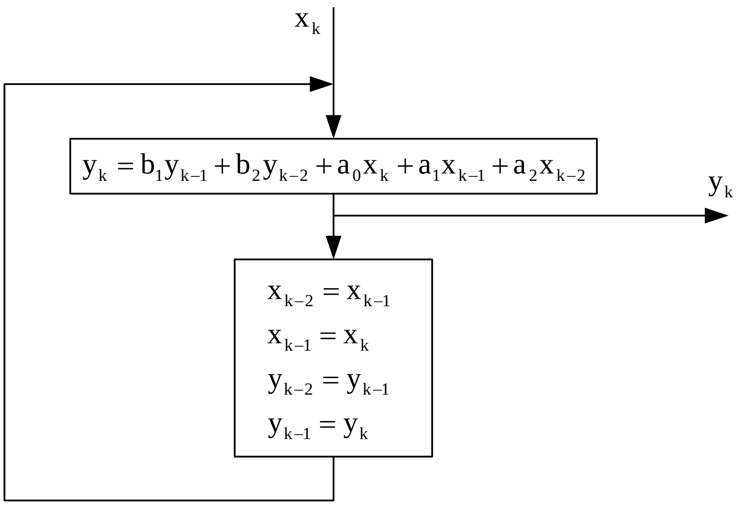
Végül képezzük a kimenet és a bemenet z-transzformáltjainak hányadosát, így megkapjuk a folyamat impulzus-átviteli függvényét.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

A válaszjel k-dik értékének számítása az impulzus átviteli függvény alapján a válaszjel előző értékei és a bemenet és annak előző értékei alapján az alábbi blokkdiagram alapján történik.



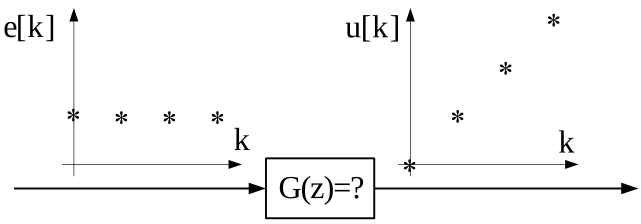
A kimenőjel k-dik értékének számítása az alábbi számítógépi programmal végezhető:



Példa

a) Határozzuk meg annak a szabályozónak az impulzus-átviteli függvényét, melynek bemenőjele e[k]=1 mintavételezett egységugrás, kimenőjele u[k]=k mintavételezett sebességugrás.

b) Az impulzus-átviteli függvény alapján állapítsuk meg, milyen matematikai műveletet végez a szabályozó.



A szabályozó be- és kimenő jelei

Ad a)

A táblázatban mindkét jel $\mathcal{Z}$-transzformáltját megtaláljuk. A szabályozó impulzus-átviteli függvénye a definíció alapján számítható:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\frac{Tz}{(z-1)^2}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{T}{z-1} = \underline{\underline{\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}}}$$

Ad b)

Az impulzus-átviteli függvényt negatív kitevős ún. „szűrő” alakban írtuk fel annak érdekében, hogy egyszerűen alkalmazhassuk az *eltolási tételt*. Szorozzunk keresztbe:

$$U(z) - z^{-1}U(z) = Tz^{-1}E(z)$$

Az *eltolási tétel* szerint z^{-1}-gyel való szorzás egy lépésköznyi jelkésleltetést jelent, így

$$\mathcal{Z}(u[k]) - \mathcal{Z}(u[k-1]) = T\,\mathcal{Z}(e[k-1])$$

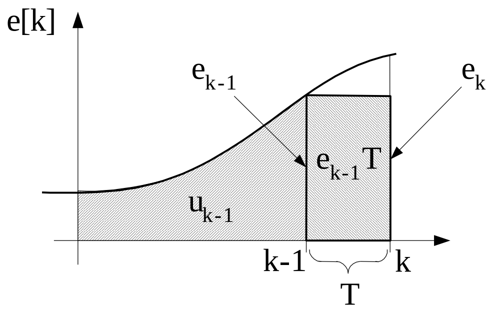
Az inverz $\mathcal{Z}$-transzformációt formálisan elvégezve az egyes minták között az alábbi összefüggést kapjuk:

$$u_k - u_{k-1} = Te_{k-1}$$

Átrendezés után látható, hogy a kimenőjel

$$u_k = u_{k-1} + Te_{k-1}$$

utolsó értéke az előző kimenő jel, valamint a bemenő jel és a mintavételi idő szorzatából tevődik össze. Most már csak ki kell találnunk, hogy a fenti egyenlet milyen matematikai műveletet valósít meg!



Az ábrát szemlélve (Te_{k-1}) jelenti a téglányszabállyal számított görbe alatti területet az utolsó előtti és az utolsó mintavételi időpont között, amit hozzáadva az u_{k-1} eddig kiszámított görbe alatti területhez az <u>e[k] függvény numerikus integrálását</u> eredményezi a <u>téglányszabály</u> szerint. A kapott eredmény nem meglepő, hiszen a sebességugrás függvény az ugrásfüggvény integráltja.

Figyeljük meg az ábrán, hogy mint minden numerikus módszer, ez is csak közelítő eredményt ad!

Példa

Impulzus-átviteli függvény differenciaegyenletté való visszaírására.

Tételezzük fel, hogy adott a diszkrét szabályozó impulzus-átviteli függvénye:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 0{,}05 \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Határozzuk meg a szabályozó által megvalósított differenciaegyenletet!

Megoldás

Először írjuk át a szabályozó egyenletét „szűrő-alakúra”, vagyis benne csak negatív kitevős (késleltető) tagok szerepeljenek. Szorozzunk z^{-1}/z^{-1}-gyel:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 0{,}05 \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Végezzük el a törtek keresztbe szorzását:

$$U(z) - z^{-1}U(z) = 0{,}05[E(z) + 0{,}5z^{-1}E(z)]$$

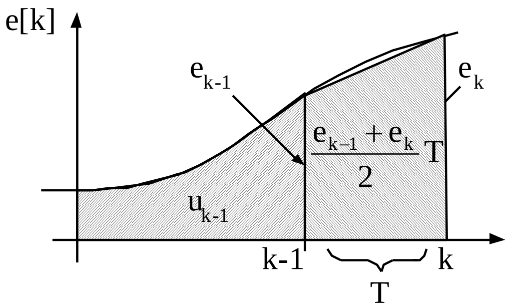
Az eltolási tétel alkalmazásával írjuk át differencia-egyenletté:

$$u(k) - u(k-1) = 0{,}05[e(k) + e(k-1)]$$

Átrendezve a differenciaegyenletet a következő formulát kapjuk:

$$u(k) = u(k-1) + 0{,}05[e(k) + e(k-1)] = u(k-1) + \frac{e(k) + e(k-1)}{2}0{,}1$$

A szabályozó kimenőjele tehát a kimenőjel u(k-1) előző értékétől, valamint a bemenőjel súlyozott aktuális és előző értékétől függ. Ha meg szeretnénk találni a megvalósított algoritmus mélyebb értelmét, akkor tekintsük az ábrát. Az e(T), e(2T), e(nT) diszkrét értékekkel adott időfüggvény (k-1)-dik és k-dik értékének számtani közepét megszorozva a lépésközzel a diagram közelítő területét adja e két pont között a trapéz-szabály szerint. Ezt a részterületet a (k-1)-dik értékig számított u(k-1) területhez hozzáadva a teljes görbe alatti területet kapjuk. Az algoritmus tehát az <u>u(t) függvény idő szerinti numerikus integrálását végzi a trapéz-szabállyal, T=0,1 s lépésközzel</u> (mintavételi idővel).



Példa

Legyen az előző $D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 0{,}05 \cdot \frac{z+1}{z-1}$ szabályozó (trapézszabály szerinti integrátor) bemenőjele e(t)=t·1(t) sebességugrás, melynek z-transzformáltja $E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$. Számítsuk ki a kimenőjel első öt mintavett értékét!

Megoldás

A kimenőjel z-transzformáltja

$$U(z) = D(z)E(z) = 0{,}05\frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = 0{,}05T\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Az időtartományba való visszatranszformálást kétféle módszerrel is elvégezhetjük.

a) Válasz visszatranszformálással

Azzal a szerencsés esettel állunk szemben, hogy a z-transzformáltak táblázatában megtaláljuk a visszatranszformálni kívánt függvényt:

$$f(t)=\frac{t^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad F(z)=\frac{T^2}{2}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Az U(z) kifejezés éppen megegyezik a táblázatban található F(z)-vel, amennyiben a mintavételi idő T=0,1 s. A keresett időfüggvény tehát

$$u(t)=\frac{t^2}{2}$$

Az első néhány kimenőjel értéke T=0,1 alkalmazásával a következő: u(T)=0,005, u(2T)=0,02, u(3T)=0,045, u(4T)=0,08, u(5T)=0,125, stb. <u>A kimenőjel kiszámított értékei csak a mintavételi időpontokban biztosak, közbenső értékekről nincs információnk!</u>

Az analízis terén szerzett elemi ismereteink alapján felismerhetjük, hogy az e(t)=t függvényből úgy kapjuk az $u(t)=t^2/2$ függvényt, hogy előbbit idő szerint integráljuk. A szabályozó tehát a bemenőjelet idő szerint integrálta!

b) Válasz polinom-osztással (long division)

A kimenőjel kifejezését polinom alakba írjuk:

$$U(z)=0{,}005\,\frac{z^2+z}{z^3-3z^2+3z-1}$$

Végezzük el a polinom-osztást (középiskola 1. osztályban tanultak alapján)

$$\begin{array}{l}
z^2+z \qquad\qquad : (z^3-3z^2+3z-1)=z^{-1}+4z^{-2}+9z^{-3}+16z^{-4}\ldots.\\
-\underline{(z^2-3z+3-z^{-1})}\\
\quad 4z-3+z^{-1}:\\
\quad -\underline{(4z-12+12z^{-1}-4z^{-2})}\\
\qquad 9-11z^{-1}+4z^{-2}:\\
\qquad -\underline{(9-27z^{-1}+27z^{-2}-9z^{-3})}\\
\qquad\quad 16z^{-1}-23z^{-2}+9z^{-3}
\end{array}$$

A válaszjel z-transzformáltja tehát

$$U(z)=0{,}005(z^{-1}+4z^{-2}+9z^{-3}+16z^{-4}\ldots.)$$

A válaszjel egymást követő értékei a következők:

u(0T)=0
u(1T)=0,005

u(2T)=0,02
u(3T)=0,045
.   .
.   .
Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a táblázattal való visszatranszformálással.