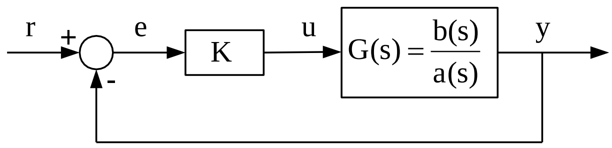
Szabályozó tervezés gyökhelygörbével

A gyökhelygörbe

Ha a G(s) átviteli függvénnyel jellemzett folyamatot arányos szabályozóval szabályozzuk, akkor a zárt rendszer pólusai K nagyságától függően más-más helyet foglalnak el a komplex számsíkon.

A *gyökhelygörbe* nem más, mint a zárt szabályozási kör pólusainak mértani helye a komplex számsíkon, a „K” erősítés, mint paraméter függvényében. Mint korábban láttuk, a zárt rendszer pólusainak elhelyezkedése egyértelmű kapcsolatban áll a rendszer tranziens viselkedésével.



A szabályozandó szakasz átviteli függvényét írjuk fel G(s) = b(s)/a(s) törtalakban, ahol a(s) n-ed rendű, míg a b(s) m-ed rendű polinom (a polinom rendűsége az „s” legmagasabb kitevőjével egyezik meg). Megvalósítható fizikai rendszerekre $n \geq m$ feltételnek kell teljesülni.

A zárthurkú szabályozási kör átviteli függvénye

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{Kb(s)}{a(s) + Kb(s)}$$

ahonnan a zárthurkú rendszer pólusai az

$$a(s) + Kb(s) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökeiként adódnak.

A gyökhelygörbével való tervezés alapötlete azon a tényen nyugszik, hogy a zárt rendszer tranziens válaszára a nyílt rendszer átviteli függvényéből képzett *karakterisztikus egyenlet* gyökeiből következtetünk. A gyökhelygörbe módszer szigorúan véve csak az arányos szabályozó „K” erősítési tényezőjének meghatározására alkalmas, de egyszerű fogásokkal bonyolultabb szabályozó tervezésére is alkalmassá tehető.

A pólusok elhelyezkedését illetően az alábbi törvényszerűségeket tapasztaljuk:

1. „K” értékétől függetlenül a zárt rendszernek mindig „n” pólusa van (az n-ed fokú nevezőnek „n” zérushelye van).
2. „K” értékétől függetlenül a zárt rendszernek mindig „m” zérója van (számláló zérushelyei).
3. A zárt rendszer gyökhelygörbéjének „n” ága van, melyek mindegyike a nyitott G(s) egyik pólusából indul és általában hozzá legközelebbi zérójába tart, miközben K értékét 0 és +végtelen között változtatjuk. Ha $K \to 0$, a zárt rendszer pólusai megegyeznek a G(s) nyílt rendszer pólusaival. Ha viszont $K \to \infty$, a zárt rendszer pólusai megegyeznek a G(s) nyílt rendszer zérushelyeivel.

4. Valós fizikai rendszerek esetén (n≥m) G(s)-nek *n-m* zérója a végtelenben van, ennek megfelelően a gyökhelygörbe *n-m* ága tart végtelenbe (aszimptoták).

A pólusok elhelyezkedéséből a szabályozás néhány fontos tulajdonságára következtethetünk az alábbi szabályok szerint:

1. Ha a pólusok valamelyike a jobboldali komplex félsíkra esik, a zárthurkú rendszer instabil lesz.
2. A képzetes tengelyhez legközelebbi pólusoknak („domináns pólusok”) van a legnagyobb befolyása a zárt rendszer tranziens válaszára, a távolabbi („gyorsabban lecsengő”) pólusok befolyása általában csekély. Ha a domináns pólusok jól elkülönülnek a többi, gyorsabb pólustól, akkor a rendszer első-, vagy másodrendű rendszerrel közelíthető.
3. Minél távolabb helyezkednek el a domináns pólusok a képzetes tengelytől, annál gyorsabb a rendszer tranziens válasza.
4. Minél nagyobb a domináns pólusok képzetes része, annál inkább oszcillál a tranziens válasz.

A gyökhelygörbe megrajzolása

Példa

Határozzuk meg az alábbi szabályozás pólusainak mozgását a K paraméter függvényében!

A karakterisztikus egyenlet

$$s^2 + s + K = 0$$

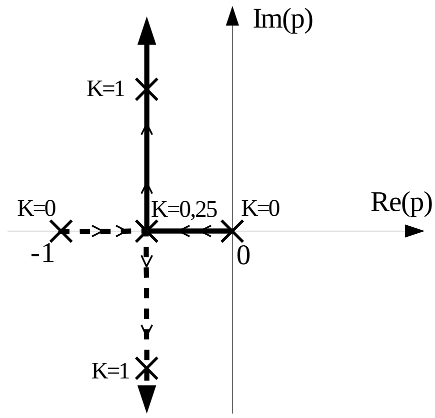
alakú, melynek gyökei, a „pólusok” a következők:

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$$

Néhány kitüntetett érték a következő:

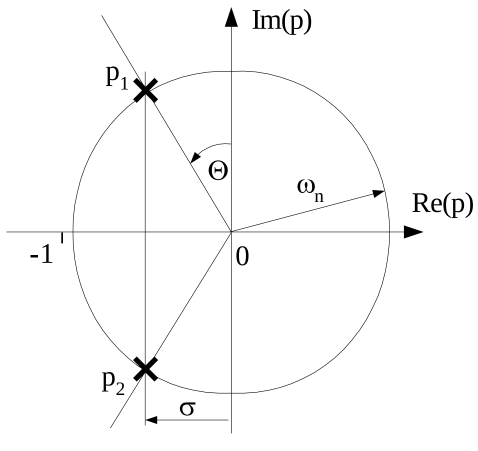
K=0	$p_1 = 0$
	$p_2 = -1$
K=0,25	$p_1 = p_2 = -\frac{1}{2}$

K=1	$p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
	$p_1 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$



A pólusok K=0 értéknél a nyitott rendszer pólusaiból (p_1=0 és p_2=-1) indulnak ki és egymás felé haladnak a valós tengelyen K növelésével. Elérve K=0,25 értéket, a két pólusgörbének közös pontja lesz (p_1=p_2=-0,5), majd a pólusgörbék szétválnak és n-m=2-0=2 ág a végtelenbe tart.

Nézzük meg pl. K=1 értékre milyen következtetéseket vonhatunk le a szabályozás tranziens viselkedésére!



Az ábrából lemérhető adatok a következők:
Felfutási idő:

$$\omega_n \approx 0{,}9\ 1/s \rightarrow t_r = \frac{1{,}8}{0{,}9} = 2\ s.$$

Beállási idő:

$$\sigma = 0{,}5\ 1/s \rightarrow t_s = \frac{4{,}6}{0{,}5} = 9{,}2\,s.$$

Túllövés:

$$D = \sin\Theta = \frac{\sigma}{\omega_n} = 0{,}555 \rightarrow M_p = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}} = e^{-\frac{0{,}555\pi}{\sqrt{1-0{,}555^2}}} = 0{,}122 \rightarrow 12{,}2\%$$

A szabályozás stabil, mivel mindkét pólus valós része negatív (σ=-0,5).

Magasabb rendű rendszerek számítógéppel és MATLAB programmal való tervezésére látunk példát a következő részben.

Példa

Legyen $G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$ a szabályozandó szakasz átviteli függvénye és K az arányos (proporcionális) szabályozó erősítése. Rajzoljuk meg a gyökhelygörbét!

A zárt rendszer átviteli függvénye:

$$W(s) = \frac{K\frac{s+2}{s(s+1)}}{1+K\frac{s+2}{s(s+1)}} = \frac{K(s+2)}{s^2 + s(K+1) + 2K}$$

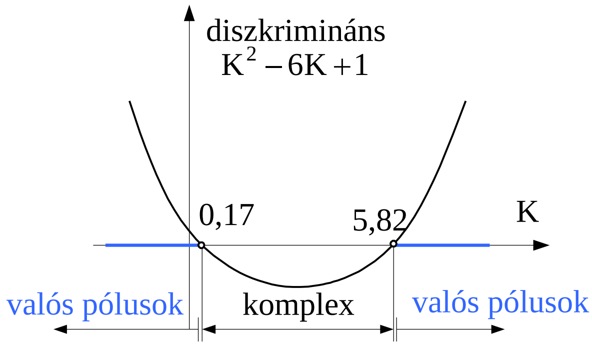
Látható, hogy a rendszer zérója (a számláló zérushelye) z=-2. A karakterisztikus egyenletet a zárt rendszer nevezőjéből kapjuk:

$$s^2 + s(K+1) + 2K = 0$$

Innen a rendszer pólusai K függvényében:

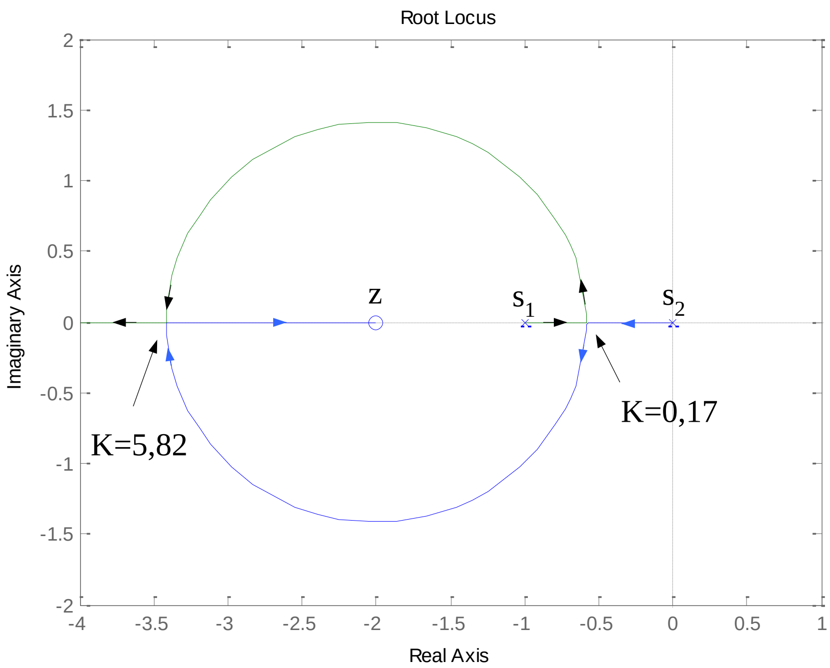
$$s_{1,2} = \frac{-(K+1) \pm \sqrt{K^2 - 6K + 1}}{2} = -\frac{K+1}{2} \pm \frac{\sqrt{K^2 - 6K + 1}}{2}$$

Valós (x tengelyen elhelyezkedő) s pólusok azon K értékeknél vannak, ahol a diszkrimináns pozitív:



$K^2-6K+1 \geq 0$ Innen $K \leq 0{,}175$ és $K \geq 5{,}825$

Ezen K értékek között a pólusok komplexek.
Az ábrán látható a pólusok elhelyezkedése a komplex számsíkon K függvényében.



A zárt rendszer átviteli függvényének nevezője másodrendű, ezért két ága van a pólusgörbének.
A pólusgörbék a nyitott rendszer s=0 és s=-1 pólusaiból indulnak.
Kis (K<0,17) erősítés értékekre a pólusok valósak és egymás felé haladnak a valós tengelyen.
K=0,17 környékén a pólusgörbék egyesülnek és rögtön szét is válnak két konjugált komplex pólusra (konjugált komplex póluspár!).
K=5,82 érték elérésekor a pólusgörbék ismét egyesülnek, majd rögtön szét is válnak. Mindkét pólus valós lesz, ezért a pólusok a valós tengelyen haladnak tovább. Az egyik pólusgörbe a z=-2 zéróba tart, míg a másik a –végtelenbe tart K növelésével.

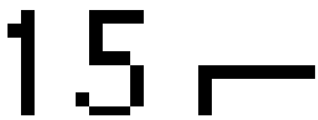
Példa. Legyen egy nyílthurkú rendszer a következő G(s) átviteli függvénnyel megadva:

$$G(s) = \frac{s+7}{s(s+5)(s+15)(s+20)}$$

Először rajzoltassuk meg a gyökhelygörbét (Root-locus)!

Írjuk be a következő m-file-t! Itt a nevezőt négy tényező szorzataként konvolúcióval adjuk meg, majd a „rlocus" utasítással megrajzoltatjuk a gyökhelygörbét az „axis" utasítással megadott tartományban.

```
num=[1 7];
den=conv(conv([1 0],[1 5]),conv([1 15],[1 20]));
rlocus(num,den)
axis([-22 3 -15 15])
```



Megfigyelhetjük, hogy

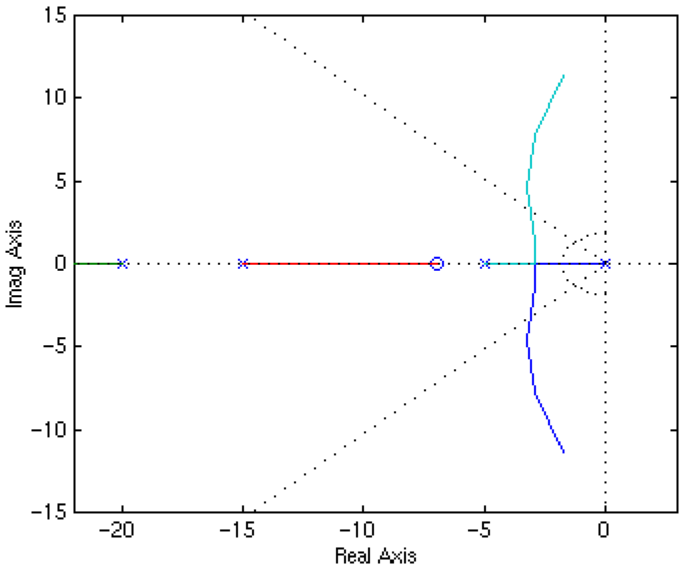
1. a rendszernek 4 pólusa van, mivel a nevező negyedfokú polinom.
2. a pólusok a G(s) nyílt rendszer $p_{10}=0$, $p_{20}=-\ 5$, $p_{30}= -15$, $p_{40}= -20$ pólusaiból indulnak ki. A pólusok kiindulási helyeit a program „x"-szel jelöli. (A bemutatott esetben a pólusok kiindulási értéke mind valós)
3. két ág K növelésével először egy pontban egyesül, majd ismét különválik és a végtelenbe tart.
4. egy ág, mely a $p_{10}=-15$ értékből indul, a hozzá legközelebbi $z_{10}= -7$ zéróba tart, melyet a program „0"-val jelöl.
5. a gyökhelygörbe n-m=3 ága a végtelenbe tart (a baloldali valós és a két konjugált komplex pólus)

A feltételeket teljesítő „K" érték kiválasztása a gyökhelygörbéből

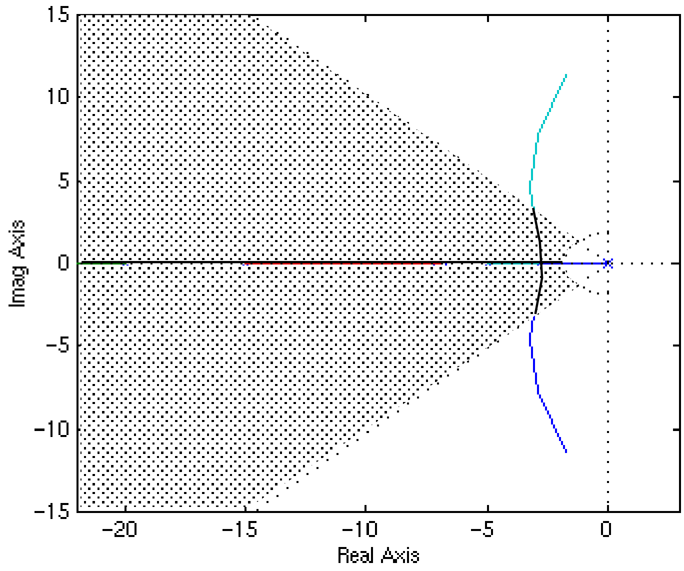
Feladatunk egy olyan arányos szabályozó tervezése, mely teljesíti a következő tervezési feltételeket: túllövés $M_p \leq 5\%$, emelkedési idő $t_s \leq 1$ s. Adjuk meg ezen feltételeknek megfelelő csillapítás és sajátfrekvencia (wn=α) értékeket.

```
D=0.7;
Wn=1.8;
sgrid(D, Wn)
```

Az `sgrid(D,wn)` parancs berajzolja az ábrába a D csillapítási értéknek, valamint a wn sajátfrekvenciának megfelelő megengedett tartományt a pólusok számára. (félkör az origó körül és két ferde egyenes)



A fenti ábrán a két, kb. 45 fokos szög alatt hajló pontvonal közötti szektor a pólusok megengedett helyét mutatja D=0,7 esetre. A két vonal közötti tartományban D>0,7 míg a vonalakon kívül D<0,7. Az origó körül pontvonallal rajzolt félkör azokat a pólusokat mutatja, melyekre a sajátfrekvencia wn=1,8. A körön belül wn<1,8 míg a körön kívül wn>1,8.

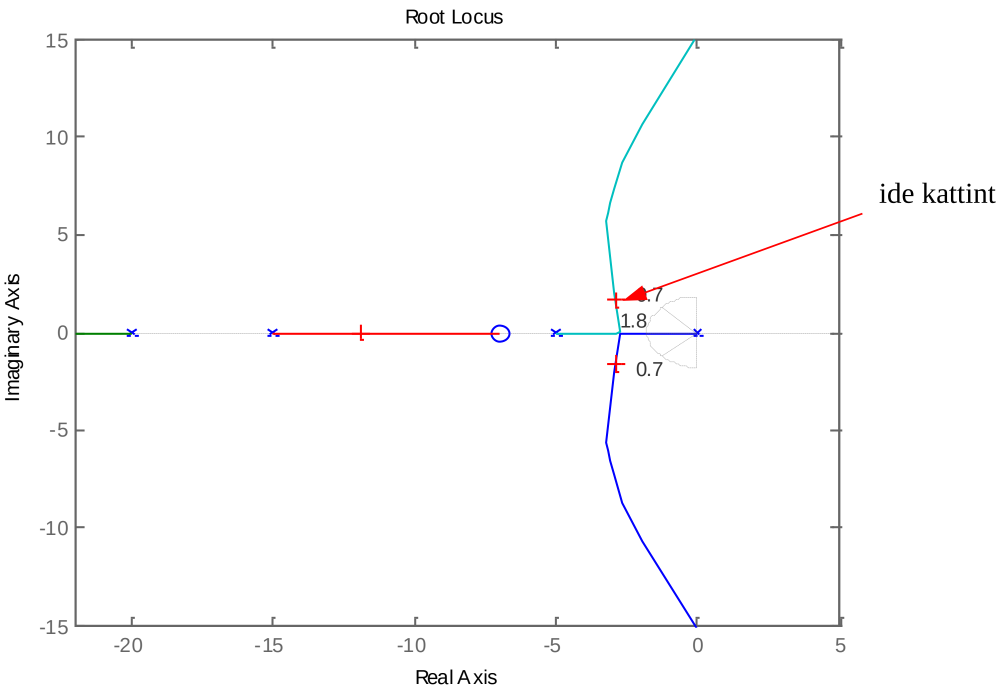


Az eredeti feladatunk szerint a túllövésnek kisebbnek kell lenni 5 százaléknál, ezért a pólusoknak a két egyenes által határolt tartományon belül kell elhelyezkedniük. Ezenkívül az emelkedési időnek kisebbnek kell lenni 1s-nál, ezért a pólusoknak a félkörön kívül kell elhelyezkedniük. A pólusok helyének megengedett tartománya, az iménti tartományok közös része (ábrán sötétített terület) a komplex félsík bal oldalán helyezkedik el, ezért a zárt rendszer stabil lesz. Mint láthatjuk, létezik olyan erősítésérték, mely esetén a gyökhelygörbe mind a négy pólusa a megengedett tartományba esik. A szabályozási feladat tehát megoldható arányos szabályozóval.

A tervező következő feladata most az, hogy a pólusokat a megengedett tartományon belül helyezze el és ezzel a K_d erősítés (desired=szükséges) értékét kiválassza. Erre szolgál a `rlocfind` parancs.

```
[kd,poles] = rlocfind(num,den)
```

Húzzuk a célkeresztet a megengedett tartományon belül a gyökhelygörbe egy pontjára és kattintsunk. Értelemszerűen a gyökhelygörbe „jó” tartományán kell a kijelölést elvégezni, lehetőleg az origóhoz minél közelebb, hogy a szabályozás a legkisebb energia ráfordítással (minimális erősítéssel) megoldható legyen. Esetünkben a közel függőlegesen haladó két görbeág a kritikus, mert annak van „jő” és „rossz” szakasza is, míg a valós tengelyen lévő görbeágak mind megfelelnek. A kijelölést tehát a kritikus görbeág megengedett szakaszán kell elvégezni.



A gyökhelygörbén piros keresztek mutatják a kiválasztott, valamint a másik három kiadódó pólust, melyek ugyanahhoz a K_d értékhez tartoznak. Meggyőződhetünk tehát arról, hogy mind a négy pólus a megfelelő tartományban található. A program editor menüjében leolvashatjuk K_d , valamint a hozzá tartozó pólusok értékeit.

kd =

504.2177

poles =

-22.6014 (ábrán nem látszik)

-11.4475

-2.9756 + 2.1881i

-2.9756 - 2.1881i

Most már csak le kell ellenőriznünk szabályzásunk viselkedését az időtartományban.

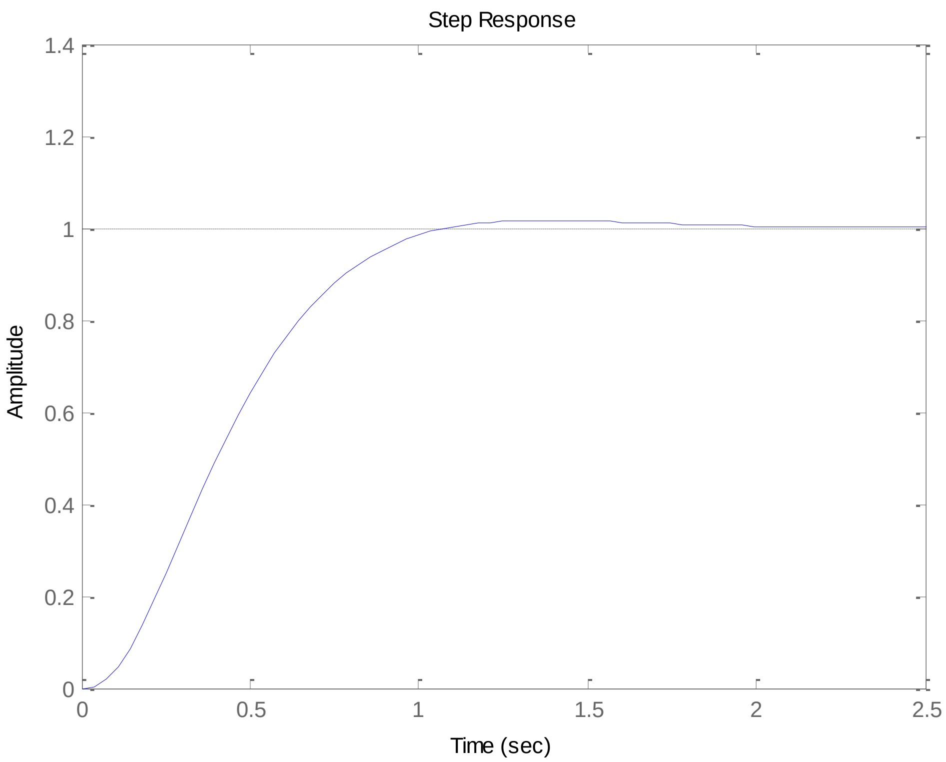
Zárthurkú szabályozási kör időtartománybeli válasza

Az átmeneti függvény megrajzolásához először a zárt rendszer átviteli függvényére van szükségünk. Legegyszerűbben a cloop utasítással (closed loop) kaphatjuk meg a zárt rendszer átviteli függvényének számlálóját (numCl) és nevetőjét (denCl) a nyitott hurok számlálójából és nevezőjéből.

```
[numCL, denCL] = cloop((kd)*num, den)
```

A „cloop” argumentumában azt a kd=504 erősítést alkalmazzuk, amely a pólus megválasztásakor adódott. A zárt rendszer átmeneti függvényét az alábbi utasítással kapjuk:

```
step(numCL,denCL)
```



Ahogy reméltük, az emelkedési idő kb. 1s, a túllövés is belül marad a megengedett 5%-os korláton. Bár rendszerünk negyedrendű volt, a domináns (y tengelyhez legközelebb lévő) pólusoknak köszönhetően másodrendű rendszerrel jól lehetett közelíteni. A várt és a kapott eredmények kismértékű eltérése főként arra vezethető vissza, hogy az általunk is használt „szabályozás minőségi feltételeit (tr=1,8/wn, D=f(Mp), stb).” zérók nélküli másodrendű rendszerre vezették le, esetünkben pedig zérót tartalmazó negyedrendű rendszert vizsgáltunk.

Megjegyzés

A Kd nagy értéke értéke felveti annak gyanúját, hogy a villamos úton, műveleti erősítővel megvalósított szabályozó kimenő jele telítődhet, vagyis 15 voltnál nagyobb nem lehet. A szabályozás reális működésének ellenőrzéséhez a szabályozó után egy jelkorlátozó blokkot célszerű beépíteni a SIMULINK programban!

Végezetül a MATLAB programot közöljük:

```
num=[1 7];
den=conv(conv([1 0],[1 5]),conv([1 15],[1 20]));
rlocus(num,den)
axis([-22 5 -15 15])
wn=1.8;
```

```
D=0.7;
sgrid(D,wn)
[kd,poles]=rlocfind(num,den)

[numCl,denCl]=cloop(kd*num,den);
step(numCl,denCl)
```