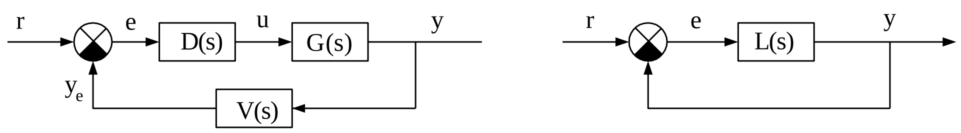
Állandósult szabályozási eltérés alapjelkövetésre

A szabályozás tranziens viselkedésén kívül számos esetben fontos az állandósult eltérés ismerete. Ennek előzetes becsléséhez mind a szabályozási köröket, mind az alapjeleket tipizálni szükséges.

a) A szabályozási körök tipizálása

Legyen a felnyitott szabályozási kör hurokátviteli függvénye $L(s)=D(s)G(s)V(s)$.



A hurok átviteli függvénye minden esetben felírható

$$L(s)=\frac{K}{s^i}L_0(s)$$

alakban, ahol

s^i kiemelhető tényező, az integráló hatás mértékére jellemző
K a statikus körerősítés
$L_0(s)$ a körerősítés maradék tagja

A szabályozás kör típusszáma a hurokátviteli függvény nevezőjéből kiemelhető „s" tényező hatványkitevőjével egyezik meg.

A rendszer tipizálása érdekében először a nevezőből kiemeljük az „s^i" tényezőt (ha van ilyen). Amennyiben nem lehetséges kiemelés, akkor formálisan $s^0=1$ kiemelést alkalmazunk. A kiemelést követően maradó részt két tényező szorzataként írjuk fel: az első tényező a maradék rész s=0 helyettesítéssel számított értéke (K), a második tényező az azonos átalakításoknak megfelelően értelemszerűen maradó rész ($L_0(s)$). Ez utóbbi értéke s=0 helyen minden esetben $L_0(0)=1$.

Megjegyzendő, hogy eredő differenciáló hatás nem képzelhető el, mert állandósult viszonyok között ez szakadást jelentene a jelfolyamban (konstans deriváltja nulla).

Példa.
Határozzuk meg az

$$L(s)=\frac{b}{s+a}$$

hurokátviteli függvényű szabályozási kör típusszámát!
A nevezőből most ténylegesen nem lehet integráló „s" tagot kiemelni, ezért formálisan $s^0=1$ tényezőt emelünk ki. Az átalakítást a statikus hurokerősítés $K=L(s)\big|_{s=0}=\frac{b}{a}$ értékének leírásával folytatjuk, majd leírjuk a maradékot, ügyelve, hogy a tört értéke ne változzon meg.

$$L(s)=\frac{b}{s+a}=\frac{1}{s^0}\cdot\underbrace{\frac{b}{a}}_{K}\cdot\underbrace{\frac{a}{s+a}}_{L_0(s)}$$

A szabályozási kör hurokerősítésének tipizált alakja a következő:

$$L(s)=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{s+a}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{s^0}\cdot\frac{a}{s+a}$$

A szabályozási kör tehát „i=0" típusú.

b) Az alapjelek tipizálása

Megállapodás szerint az alapjeleket operátortartományban

$$R(s)=\frac{\hat{r}}{s^{j+1}}$$

összefüggéssel adjuk meg. Eszerint

ugrásfüggvényre j=0
sebességugrásra j=1
gyorsulásugrásra j=2.

c) Állandósult szabályozási eltérés (steady-state error)

A zárt szabályozási kör átviteli függvénye:

$$Y_z(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Ideális esetben a rendszer az R(s) alapjelet követné, ehelyett a tényleges kimenet Y(s) lesz. Az eltérés (a rendelkező jel) *Laplace*-transzformáltja:

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)-T(s)R(s)=[1-T(s)]R(s)=\frac{1}{1+L(s)}R(s)$$

Helyettesítsük L(s) tipizált alakját, valamint a bemenőjel tipizált alakját, ekkor

$$E(s)=\frac{1}{1+\frac{K}{s^i}L_0(s)}\cdot\frac{\hat{r}}{s^{j+1}}$$

Időtartományban az állandósult hibát a *végérték-tétellel* kapjuk, figyelembe véve, hogy a maradéktag statikus értéke $L_0(0)=1$:

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+\frac{K}{s^i}L_0(s)}\cdot\frac{\hat{r}}{s^{j+1}}=\underline{\underline{\lim_{s\to 0}\frac{s^{i-j}}{s^i+K}\hat{r}}}$$

Példa

Határozzuk meg az előző példában szereplő rendszer állandósult hibáját $x_a(t)=1(t)$ ugrásbemenet, valamint $x_a(t)=t\cdot 1(t)$ sebességugrás-bemenet esetén!

Mivel a szabályozási kör típusa i=0, valamint a bemenőjel típusa j=0, ezért

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s^{i-j}}{s^i+K}\hat{r}=\lim_{s\to 0}\frac{s^0}{s^0+K}1=\frac{1}{1+K}$$

Az eredményt a táblázatban feljegyezzük.
Sebességugrás bemenet esetén az állandósult hiba

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s^{i-j}}{s^i+K}\hat{r}=\lim_{s\to 0}\frac{s^{0-1}}{s^0+K}1=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s(1+K)}=\infty$$

Az eredményt a táblázatban feljegyezzük.

Példa

Alkalmazzunk az előbbi $G(s)=\dfrac{b}{s+a}$ folyamatra PI szabályozást $D(s)=K_P+\dfrac{K_I}{s}$ átviteli tényezőjű szabályozóval. Határozzuk meg az állandósult szabályozási eltérést ugrás- és sebességugrás bemenet esetén!

A hurokerősítés

$$L(s)=\frac{K_Ps+K_I}{s}\frac{b}{s+a},$$

melyet a folyamat tipizálásához szükséges alakra alakítunk át.

$$L(s)=\frac{K_Ps+K_I}{s}\frac{b}{s+a}=\frac{1}{s}\cdot\underbrace{\frac{K_Ib}{a}}_{K}\cdot\underbrace{\frac{a(K_Ps+K_I)}{K_I(s+a)}}_{L_0(s)}$$

A szabályozási kör típusa i=1. Az állandósult szabályozási eltérés ugrásbemenetre (j=0):

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s^{i-j}}{s^i+K}\hat{r}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+K}=0$$

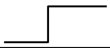
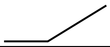
Az eredményt a táblázatban feljegyezzük.

Az állandósult szabályozási eltérés sebesség-ugrásbemenetre (j=1):

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s^{i-j}}{s^i+K}\hat{r}=\lim_{s\to 0}\frac{s^0}{s+K}=\frac{1}{K}$$

Az eredményt a táblázatban feljegyezzük.

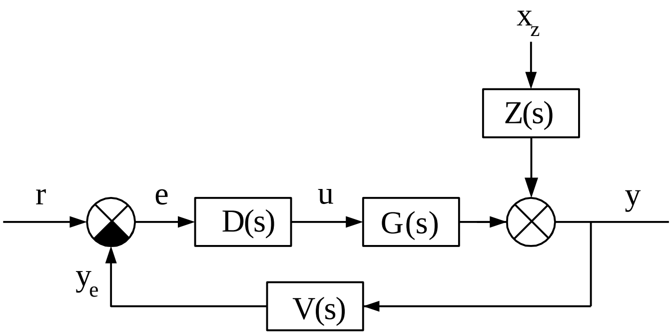
Hasonló módon kiszámítva a különböző típusú rendszerek állandósult szabályozási hibáját különböző típusú bemenő jelekre, az eredmények az alábbi táblázatban foglalhatók össze.

	i=0	i=1	i=2
j=0 	$\frac{1}{1+K}$	0	0
j=1 	∞	$\frac{1}{K}$	0
j=2 	∞	∞	$\frac{1}{K}$

II. Statikus szabályozási eltérés a zavarás következtében

a) A zavarás hatáspályájának tipizálása

A szabályozási kör nem csak az alapjel követését biztosítja, hanem különféle zavarások következményeinek elhárítását is.



Például egy magnó sebességszabályozója az állandó értékű alapjelnek megfelelő sebességet akkor is tartja, ha különböző súrlódású kazettákat játszanak le vele. Az x_z zavaró jel ebben az esetben a különböző amplitúdójú ugrásfüggvénnyel megadható súrlódási nyomaték. A következő részben arra keresünk választ, hogy milyen állandósult eltéréssel követi a rendszer a különböző típusú zavarójeleket. A zavarás hatása a kimenőjelre a zavarás helye és a kimenőjel közötti

$$T_z(s) = \frac{Y(s)}{X_z(s)} = \frac{Z(s)}{1+L(s)}$$

zavarátviteli függvénnyel írható le. A zavarás hatáspályáján, vagyis a zavarás helye és a kimenet között értelmezett Z(s) átviteli függvényt is tipizáljuk, hasonlóan a hurok tipizálásához:

$$Z(s) = \frac{K_z}{s^z} Z_0(s)$$

ahol „z” a zavarási hatáspálya típusszáma. Most figyelembe véve a hurok típusszámát is, a zavarjelre vonatkoztatott átviteli függvény felírható

$$W_z(s) = \frac{\frac{K_z}{s^z} Z_0(s)}{1 + \frac{K}{s^i} T_0(s)} = \frac{s^{i-z}}{s^i + KT_0(s)} K_z Z_0(s)$$

alakban is. A rendelkezőjel tehát

$$E(s) = \frac{s^{i-z}}{s^i + KT_0(s)} K_z Z_0(s) \cdot X_z(s)$$

A zavarójeleket az alapjelekkel megegyező módon tipizálhatjuk.

b) Állandósult szabályozási eltérés (steady-state error)

Időtartományban az állandósult szabályozási eltérést a határértéktétellel kapjuk:

$$e_z(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^{i-z+1}}{s^i + K} \cdot \frac{\hat{x}_z}{s^{j+1}} = \lim_{s \to 0} \frac{s^{i-(z+j)} K_z}{s^i + K} \hat{x}_z$$

Hasonlóan az alapjelekhez, tetszőleges típusú zavarójelekre is kiszámítható a különböző típusú rendszerek állandósult hibája. Az eredmények az alábbi táblázatban foglalhatók össze. A baloldali oszlopban a zavarójel típusszámának és a zavarási hatáspálya típusszámának összege áll.

	i=0	i=1	i=2
j+z=0	$\frac{K_z}{1+K}$	0	0
j+z=1	∞	$\frac{K_z}{K}$	0
j+z=2	∞	∞	$\frac{K_z}{K}$

Állandósult hiba a zavarás következtében

Példa
DC motor sebességszabályozása változó nagyságú zavarójel ellenében

Adott az előző példában szereplő DC motor, amivel egy magnó szalaghajtását szeretnénk megoldani. Az alapprobléma abban áll, hogy az egyes kazetták M_{s1}, M_{s2}, ….súrlódási nyomatéka különböző, előre ismeretlen érték. Azt szeretnénk elérni, hogy a motor állandósult fordulatszáma tág súrlódási nyomatékhatáron belül legyen állandó, ami a „nyávogásmentes” működés alapfeltétele.

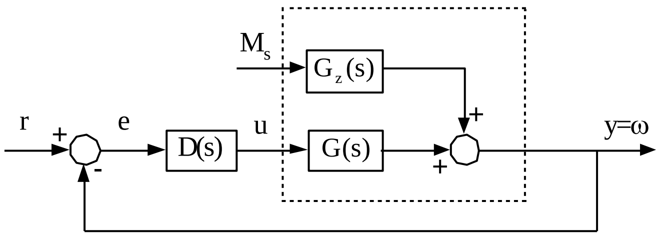
Mivel a feladat most sebességszabályozás, ezért a motor átviteli függvényeit szögsebesség kimenetre kell értelmezni. A beavatkozó jelre vonatkozó átviteli függvény

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{(Js+b)(Ls+R)+k^2},$$

míg a zavaró (súrlódási) nyomatékra vonatkozó átviteli függvény

$$G_z(s) = \frac{\Omega(s)}{M_s(s)} = \frac{-(R+Ls)}{(Js+b)(Ls+R)+k^2}$$

A rendszer sematikus blokkdiagramja az alábbi:

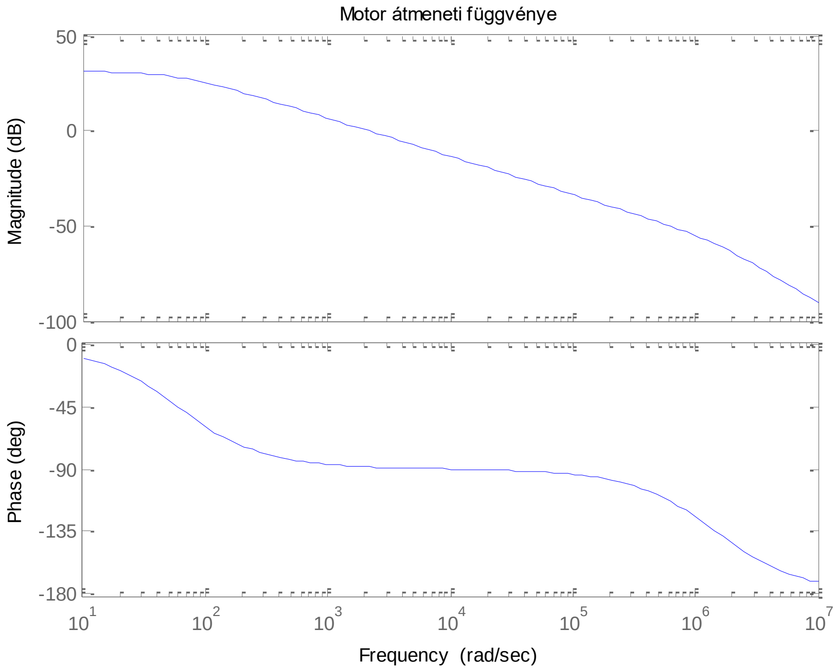


A zavarás hatáspályájának típusa j=0, mivel a zavarás hatáspályájának $G_z(s)$ átviteli függvényében a nevezőből nem lehetséges „s”-t kiemelni.
A zavarójel típusa z=0, mivel a zavarás ugrásfüggvény.
A táblázat ide vonatkozó sora j+z=0. Zérus állandósult eltéréshez tehát i≥1 feltételnek kell teljesülnie.

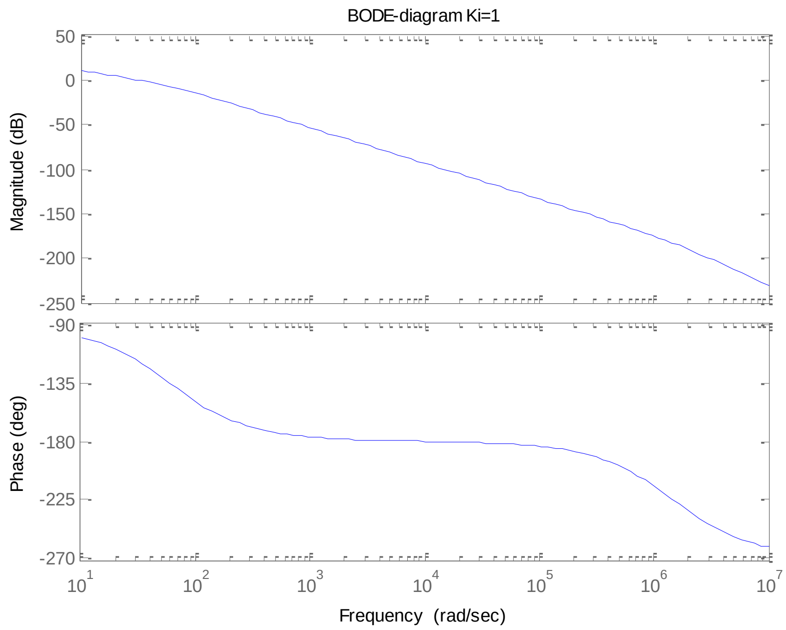
Következésképpen a szabályozónak biztosan kell kiemelhető „s” tényezőt tartalmaznia a nevezőben. Így az I, PI, PID típusú szabályozók jönnek számításba, melyek átviteli függvényei rendre: $D_I(s) = \frac{K_I}{s}$; $D_{PI}(s) = \frac{K_p s + K_I}{s}$; $D_{PID}(s) = \frac{K_p s + K_d s^2 + K_I}{s}$.

a) *Alapjelkövetés*

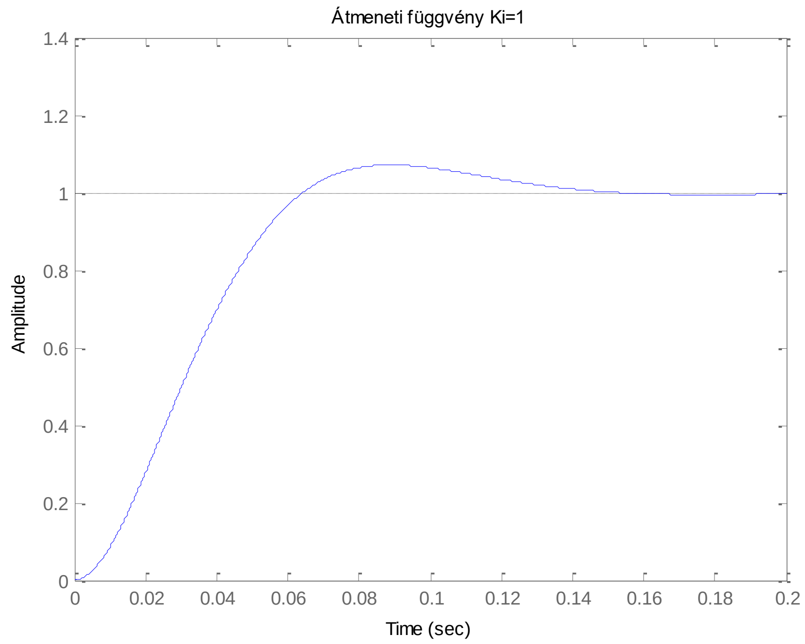
A szabályozót alapjelkövetésre méretezzük, majd zavarelnyomásra ellenőrizzük. Nézzük először a motor BODE-diagramját! Ahogy vártuk, nincs integráló hatás, a görbe vízszintes (0 dB/dekád) meredekséggel indul.



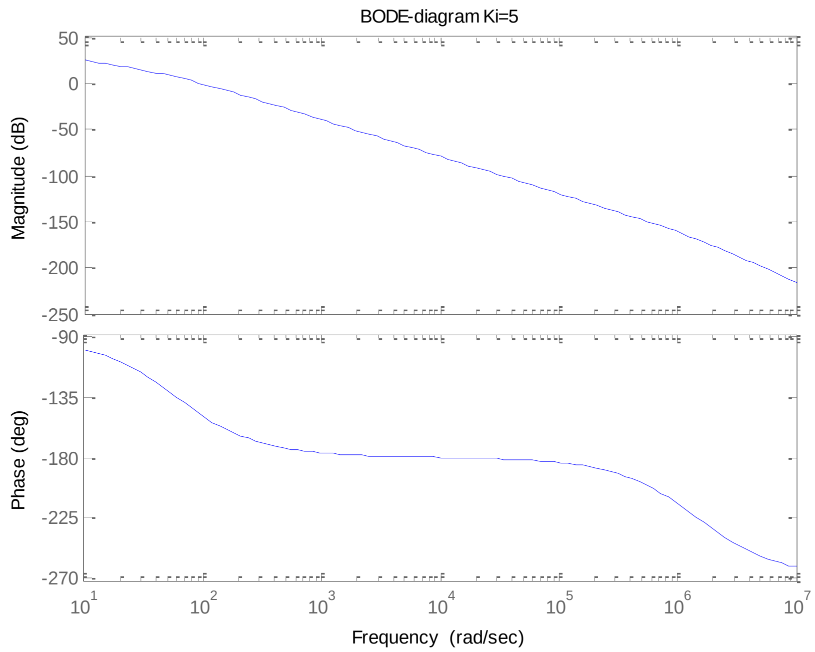
Először „I” szabályozóval próbálkozunk. A szabályozó átviteli függvénye $D_I(s)=K_I/s$ alakú. Egyéb információ híján válasszuk először a $K_I=1$ értéket.



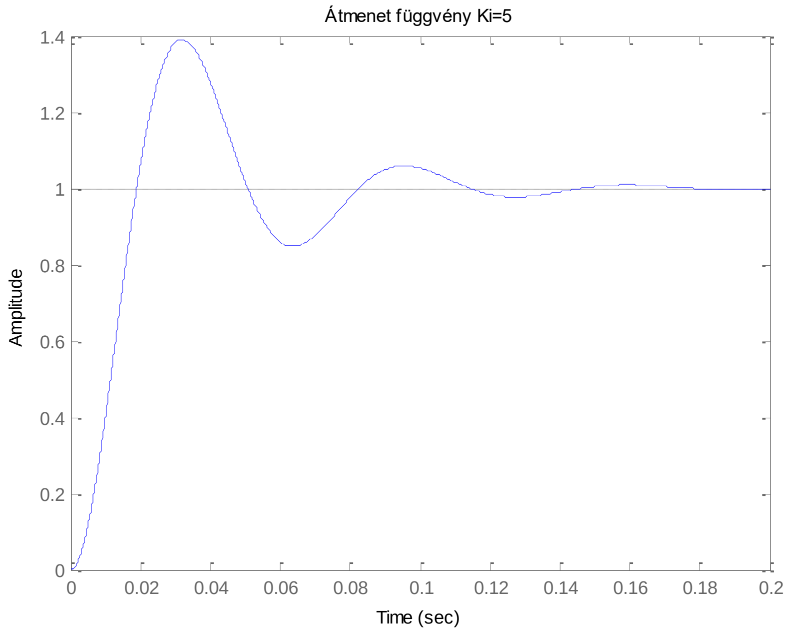
Az 1/s-sel való szorzás következtében a görbe összes szakaszán -20 dB/dekáddal változott a meredekség és -90 fokkal változott a fázistolás. Ezen kívül a vágási frekvencia is csökkent, lassult a beállás. Bár megszűnt az állandósult hiba (a görbe most már -20 dB/dekád meredekséggel indul), de nagyon kicsi a fázistartalék, túllövésre számítunk.



Az átmeneti függvényen jól látszik a túllövés és lassú a beállás! Toljuk el felfele az amplitúdó-görbét 20log5 decibellel, hogy gyorsuljon a beállás. Növeljük az integrálás együtthatóját Ki=5-re!



Felfele tolódott a görbe, minek következtében gyorsult a beállás, de a fázistartalék még kisebb lett.



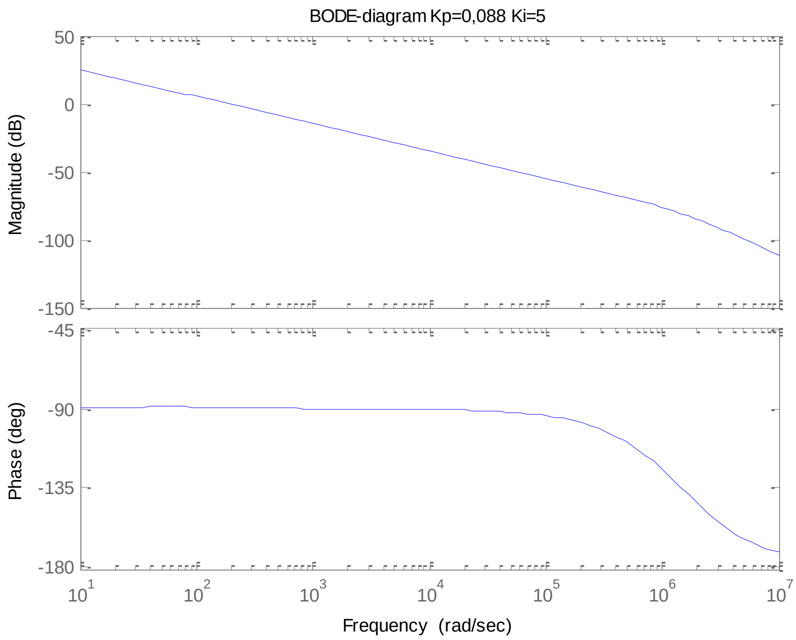
Valóban nagy a túllövés, mert kicsi a fázistartalék. Ha egy kisfrekvenciás zérót tudnánk behozni, akkor attól a zérótól jobbra 90 fokkal nőne a fázistartalék (a közelítő BODE-diagramon a zérónál +90 fokos fázisugrás lép fel). Válasszuk meg a zérót úgy, hogy a $p_1=57$ pólussal essen egybe: $z=p_1=57$ rad/s! A gyakorlatban ezt úgy tudjuk elérni, hogy az „I” szabályozó helyett „PI” szabályozót választunk, mert annak számlálója tulajdonképpen egy zérót hoz be:

$$D_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = \frac{K_I(s\frac{K_P}{K_I}+1)}{s}$$

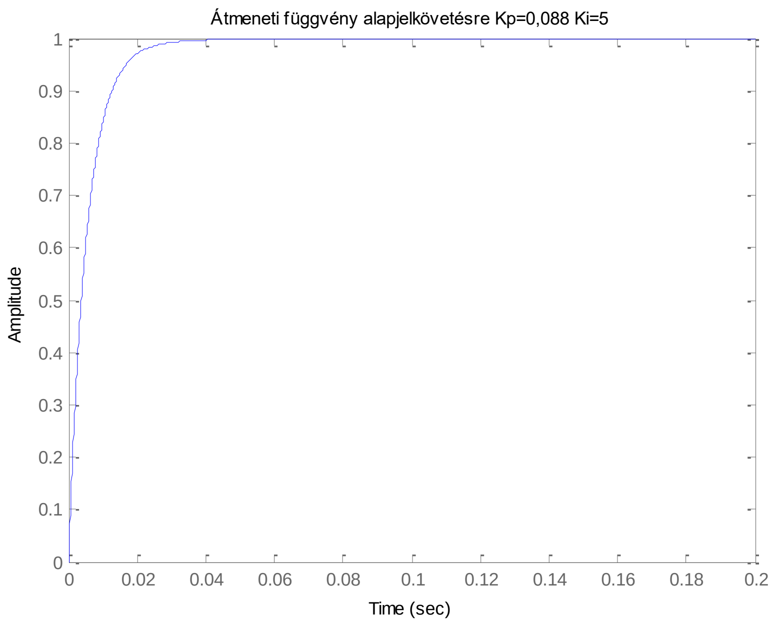
Emlékezzünk vissza, hogy a zárójelben lévő tag ábrázolásához azt $(j\frac{\omega}{z}+1)$ alakra kellett hozni. A tag zérója tehát $z=\frac{K_I}{K_P}$. Innen meghatározhatjuk a szükséges arányos erősítés értékét:

$$K_P = \frac{K_I}{z} = \frac{5}{57} = 0{,}088$$

A BODE-diagramon a -20 dB/dekád meredekségű szakasz jelentősen megnőtt és ezen a szakaszon a fázistartalék is kedvezően alakul.

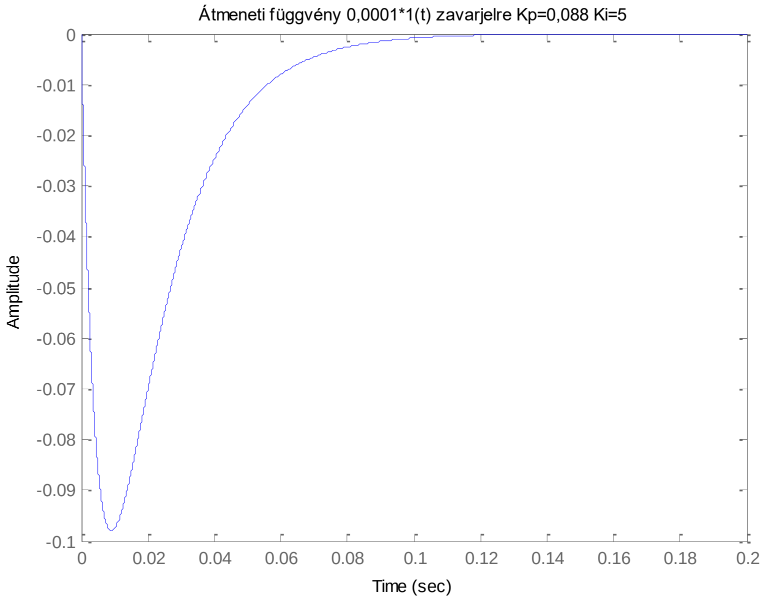


Az átmeneti függvényt tekintve látjuk, hogy az alapjelkövetésre vonatkozó követelmények tökéletesen teljesülnek.



b) Zavarelhárítás

A zavarójelnek tekintett súrlódási nyomaték legyen M_s=0,0001·1(t) ugrásfüggvény a nagy súrlódású kazetta következtében. A szögsebesség változása a zavarójel hatására a következőképpen alakul:



Az ábrán látható szögsebesség-függvény természetesen az alapjelkövetésre számított szögsebesség-függvényre szuperponálódik. A szögsebesség hirtelen lecsökken a nagy súrlódó nyomaték hatására, de a szabályozás kb. 0,1 s alatt megszünteti a szögsebesség változását. A magnó a bekapcsolástól számított kb. 0,1 s múlva az előírt szögsebességgel forog, a kazetta súrlódási nyomatékától szinte függetlenül. A valóságban ellenőrizni kell, hogy mi az a maximális súrlódó nyomaték, amit a szabályozás még kompenzálni tud. Ehhez a tényleges jelszinteket kell ismerni (SIMULINK), nehogy a motor túlvezérlődjön!