A szabályozás minőségi követelményei

A szabályozások tervezésekor néhány szemléletes követelményt adnak meg, melyek főként a szabályozás tranziens viselkedésre, kisebb részt az állandósult állapotra vonatkoznak A következőkben a tranziens viselkedés jellemzésére szolgáló néhány minőségi követelménnyel foglalkozunk.

Tételezzük fel, hogy a zárt szabályozási kör viselkedése az alábbi másodrendű átviteli függvénnyel adható meg:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2}$$

melyet a D csillapítás és az ω_n sajátfrekvencia jellemez. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a vizsgált átviteli függvény nem tartalmaz zérót (számlálójában „s”-es tagot), ezért k**övetkeztetéseink csak ilyen típusú rendszerre lesznek helytállóak!** Mindazonáltal a szabályozási kör ilyen típusú másodrendű átviteli függvénnyel való modellezése szinte az összes lehetséges jelenség analitikus tárgyalását lehetővé teszi.

A másodrendű rendszer egységugrás-bemenetre adott válasza-az átmeneti függvény-az inverz Laplace-transzformáció részleteinek mellőzésével a következő:

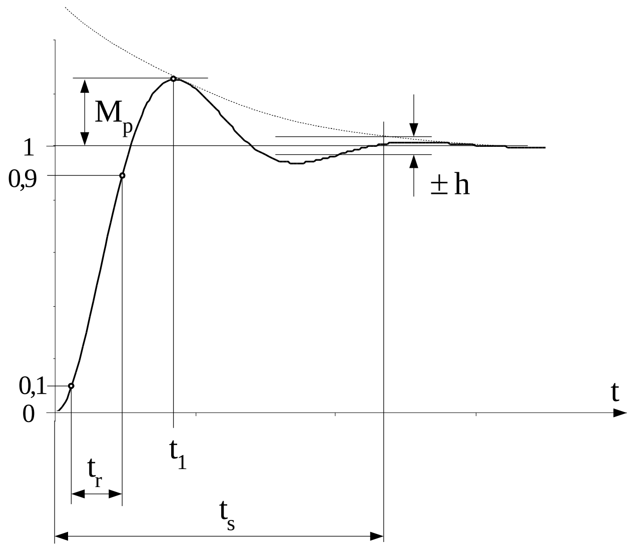
$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

Az összefüggésben

$\sigma = D\omega_n$ a csillapodó rezgések burkológörbéjét leíró exponenciális függvény kitevője.

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-D^2}$ a csillapodó rezgések tényleges, mérhető körfrekvenciája, a „csillapított sajátfrekvencia”.

Az ábrán egy lengőképes, másodrendű átviteli függvénnyel jellemzett szabályozási rendszer ugrásfüggvényre adott válaszát látjuk. A szabályozás tranziens tulajdonságait az időtartományban az alábbi fogalmakkal jellemezhetjük:



a) Emelkedési idő, t_r (rise time).
   Arra jellemző, hogy milyen gyorsan éri el a rendszer kimenete a célul tűzött értéket. Pontosabban megfogalmazva: az az időtartam, ami alatt a válaszjel az állandósult jelszint 10 százalékáról 90 százalékára növekszik
   Beállási idő, t_s (settling time).
   A tranziens elhalásárának gyorsaságára jellemző. Az az idő, mely eltelte után a rendszer kimenetének eltérése az állandósult értéktől kisebb, mint egy megadott hibaszázalék (1%, 2%, 5%).
b) Túllövés, M_p (peak magnitude)
   A kimenőjel maximális eltérése az állandósult értéktől, annak százalékában kifejezve.(Az ábrán kb. 25%)

Megjegyzendő, hogy léteznek olyan ún. integrál-kritériumok is, melyek egyetlen számadattal jellemzik az egész tranziens folyamatot.

A minőségi követelmények kapcsolata a rendszer ω_n és D paraméterével

a) Túllövés

A túllövés analitikus meghatározásához az átmeneti függvény első maximumát kell megtalálni. Mint ismeretes, egy függvény szélsőértéke ott van, ahol első deriváltja zérus. A derivált függvény a következő:

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^{-\sigma t}\sigma(\cos\omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d t) - e^{-\sigma t}(-\omega_d \sin\omega_d t + \sigma\cos\omega_d t) = e^{-\sigma t}(\frac{\sigma^2}{\omega_d} + \omega_d)\sin\omega_d t$$

A derivált három tényezője közül az első kettő nem lehet nulla, csak a harmadik. Szélsőérték tehát a

$$\sin\omega_d t = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_d t = k\pi, \quad k = 1,2,3,....$$

feltétel teljesülésekor áll fenn. Az első túllövés ideje (k=1):

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Az átmeneti függvény első maximuma tehát

$$y(t_1) = 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}}$$

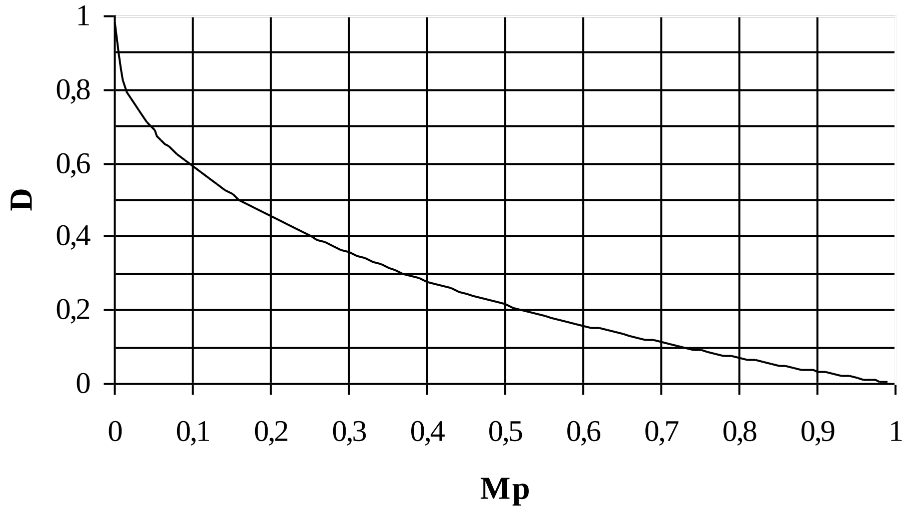
amit $1+M_p$ alakban is írhatunk. Innen a túllövés a második tagok összehasonlításával adódik:

$$M_p = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}}$$

A túllövés tehát a csillapítástól függ. Adott M_p esetén a csillapítás a

$$D = \frac{\ln M_p}{\sqrt{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}$$

összefüggéssel számítható.
A csillapítás és túllövés közötti kapcsolat az ábrán látható.



b) Beállási idő
Legegyszerűbben az átmeneti függvény burkológörbéje és a hibahatárnál (h_1= ±1%, h_2= ±2%, h_5= ±5%) húzott vízszintes egyenes metszéspontjaként számíthatjuk.

Az alsó burkológörbe és a hibahatár metszéspontja az

$$1 - e^{-\sigma t_s} = 1 - h$$

egyenlettel számítható. A beállási időt kifejezve

$$t_s = -\frac{\ln h}{\sigma}$$

Különböző hibahatárokra a beállási idő értékét a táblázatban láthatjuk

h	t_s (s)
1%	$\frac{4{,}6}{\sigma}$
2%	$\frac{4}{\sigma}$
5%	$\frac{3}{\sigma}$

c) Emelkedési idő
Az emelkedési idő számítása bonyolult és nagyban függ a rendszer csillapításától, ezért levezetés helyett csupán a végeredményt közöljük:

$$t_r = \frac{1{,}8}{\omega_n}$$

Megjegyezzük, hogy a számláló értéke a csillapítástól függően 1….2,2 között változhat, ezért **a közölt összefüggés csak nagyságrendi becslésre alkalmas**.

A minőségi követelmények és a pólusok kapcsolata

A „Mechatronika alapjai II”-ben megmutattuk, hogy egy másodrendű rendszer tranziens viselkedését az

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2}$$

átviteli függvény karakterisztikus egyenletének (nevező=0) gyökei határozzák meg. **A zárt szabályozási kört jellemző átviteli függvény nevezőjének gyökeit a továbbiakban pólusoknak (p_1, p_2) hívjuk.** Emlékeztetünk rá, hogy a rendszer átmeneti függvénye a pólusokkal kapcsolatos:

$$y(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

A zárt szabályozási kör pólusait a komplex számsíkon ábrázoljuk és ottani elhelyezkedésükből egyértelműen következtethetünk a rendszer időtartománybeli viselkedésére. A korszerű számítástechnikai módszerek már lehetővé teszik a pólusok tetszőleges pontosságú meghatározását magasabb fokszámú karakterisztikus egyenletek esetében is, ami egy nagyon szemléletes szabályozó tervezési eljárás, a „*gyökhelygörbe-módszer*” újra-felfedezéséhez vezetett. A „*gyökhelygörbe módszer*” éppen a pólusok komplex síkon való helyes elhelyezésére vezeti vissza a szabályozás tervezését. A következőkben a

„*gyökhelygörbe-módszer*” megalapozásaként a pólusok elhelyezkedése és a tranziens válasz kapcsolatát tárjuk fel.

A nevező gyökei (a pólusok) szempontjából a *Lehr*-csillapításnak kitüntetett szerepe van. D>1 esetben két valós pólust kapunk (mint középiskolában a másodfokú egyenlet megoldásakor), ekkor a rendszer nem lengőképes, hanem ugrásfüggvény bemenetre exponenciálisan áll be. A gyakoribb D<1 esetben konjugált komplex póluspárt kapunk. A rendszer ilyenkor lengésekre képes és a szabályozott jellemző csak néhány lengés után éri el állandósult értékét. A pólusok valós része negatív és közös, a képzetes részük pedig csak előjelben különbözik:

$$p_{1,2} = \frac{-2D\omega_n \pm j2\omega_n\sqrt{1-D^2}}{2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

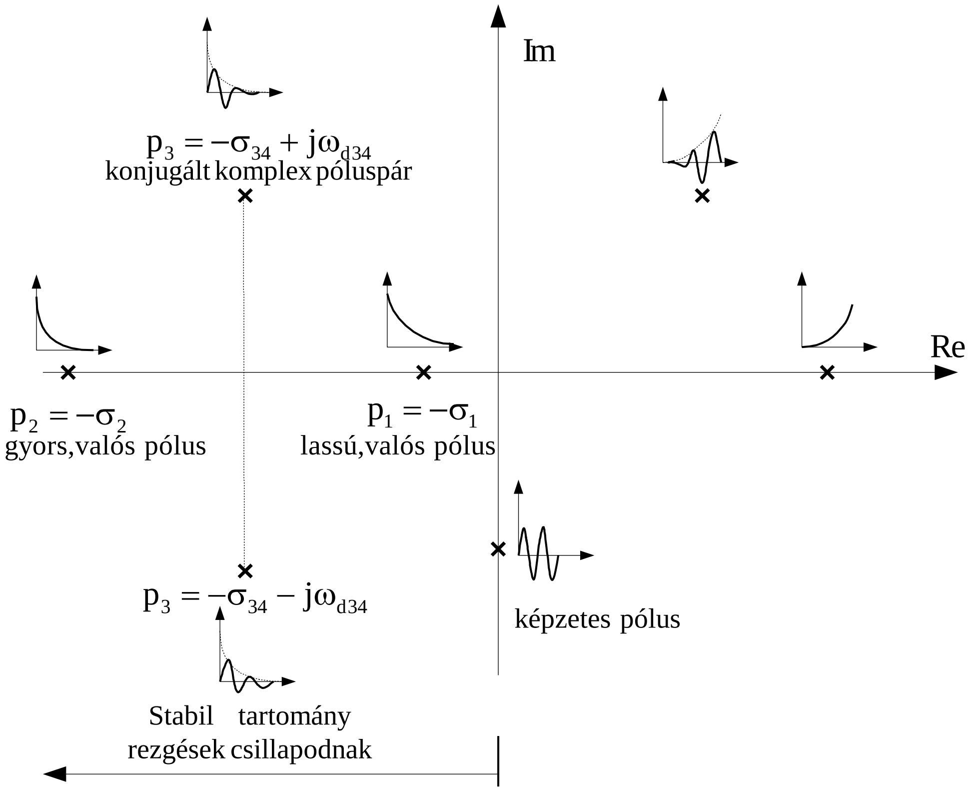
A pólusnak a komplex számsíkon a P(σ; ωd) koordinátákkal jellemzett pont felel meg. mely jelölésére egyezményesen „X” szimbólumot használunk.

A bevezetett jelöléseknek más értelmezést is adhatunk:

$\sigma = D\omega_n$	**a pólus valós része**. (Időtartománybeli jelentése: a csillapodó rezgések burkológörbéjét leíró exponenciális függvény kitevője).
$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-D^2}$	**a pólus képzetes része**. (Időtartománybeli jelentése: a csillapodó rezgések tényleges, mérhető körfrekvenciája, a „csillapított sajátfrekvencia”).

Figyelem! A pólusnak mind a valós, mind a képzetes része körfrekvencia jellegű mennyiség, így a pólus komplex körfrekvenciát jelent!

Értelemszerűen a komplex számsík vízszintes tengelyére a komplex körfrekvencia valós részét, míg függőleges tengelyére a komplex körfrekvencia képzetes részét mérjük. A pólusok elhelyezkedésétől függően a tranziens folyamatok időbeli alakulása az ábrán látható.



1. A stabilitás feltétele

A rendszer stabilitása megköveteli, hogy az átmeneti függvény burkológörbéje csillapodjon, vagyis a rendszer összes pólusának valós része (az exponenciális burkológöbe kitevője) negatív legyen.

A stabilitás feltétele, hogy a rendszer összes pólusa a komplex számsík bal oldalán helyezkedjen el.

A stabilitást értelmezhetjük a nyitott, szabályozatlan rendszerre, valamint a zárt szabályozási körre is.

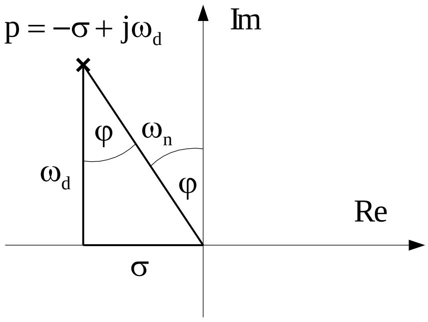
2. Emelkedési-idő feltétel

További felismerést tehetünk, ha a csillapított sajátfrekvencia összefüggését négyzetre emeljük és átrendezzük:

$$\omega_d^2 = \omega_n^2 - D^2\omega_n^2 = \omega_n^2 - \sigma^2 \;\rightarrow\; \underline{\underline{\sigma^2 + \omega_d^2 = \omega_n^2}}$$

Gyököt vonva $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$ adódik, amiből az alábbi következtetés vonható le:

A P(σ; ω_d) koordinátákkal jellemzett pólus origótól mért távolsága a rendszer (ehhez a pólushoz tartozó) sajátrezgésének ω_n körfrekvenciájával egyezik meg.



Ha adott a rendszer emelkedési ideje, akkor a pólusoknak az origó körül rajzolt

$$\omega_n = \frac{1{,}8}{t_r}$$

sugarú körön kívül kell elhelyezkedniük.

3. Túllövési feltétel

A P(σ; ω_d) koordinátákkal jellemzett pólust az origóval összekötő egyenesnek a képzetes tengellyel bezárt szöge az ABC derékszögű háromszögből:

$$\sin\varphi = \frac{\sigma}{\omega_n} = D \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = \arcsin D}}$$

Megállapítható, hogy a pólushoz húzott sugár hajlásszöge a csillapítással van szoros kapcsolatban.

Előírt túllövés (illetve ebből számított D csillapítás) esetén a pólusoknak a $\varphi = \arcsin D$ **szög alatt hajló egyenesek által határolt szektorban kell elhelyezkedni.**

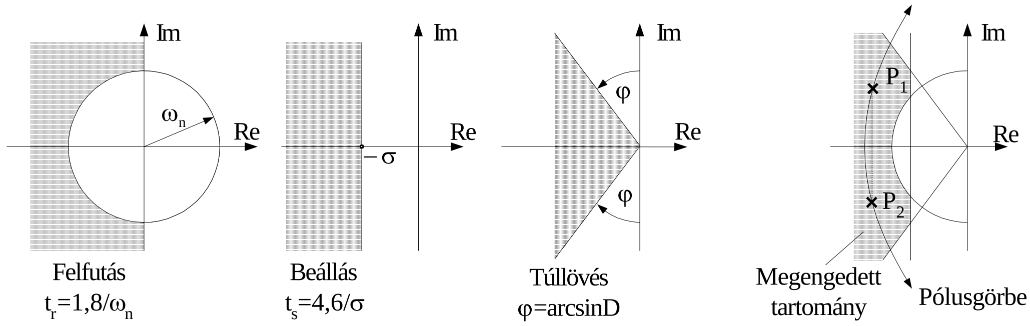
4. Beállási idő feltétel

Ha a t_s beállási idő adott, akkor a leglassabb (képzetes tengelyhez legközelebbi) pólusnak a

$$-\sigma = \frac{4{,}6}{t_s}$$

értéknél húzott függőleges egyenestől balra kell elhelyezkednie.

A következő példán jól látható a pólusok komplex síkon elfoglalt helye és a rendszer tranziens viselkedése közötti összefüggés.



Példa
Adott az alábbi specifikáció:
$t_r \leq 0{,}1$s
$t_s \leq 0{,}2$s
$M_p \leq 10\%$ (D=0,6)
Határozzuk meg a pólusok megengedett elhelyezkedési tartományát!

Az emelkedési idő feltételből a sajátfrekvencia

$$\omega_n \geq \frac{1{,}8}{0{,}1} = 18 \quad 1/s.$$

feltétel szerint a pólusoknak a 18 1/s ugarú körön kívül kell elhelyezkedni. A beállási idő feltétel szerint a pólusoknak balra kell elhelyezkedni a σ=-15,3 egyenestől.

$$-\sigma \leq \frac{4{,}6}{0{,}3} = 15{,}3 \;\; 1/s$$

Végül a túllövés feltételből a pólusoknak a

$$\varphi = \arcsin 0{,}6 = 36{,}9^{\circ}$$

szögtartományon belül kell elhelyezkedniük. A mindhárom követelményt kielégítő pólusok az ábrán jelölt tartományon belül esnek.