

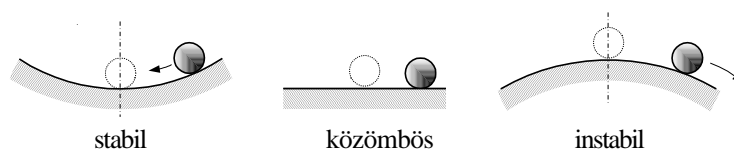
Stabilitás

A negatív visszacsatolás hátrányos tulajdonsága, hogy a szabályozást instabillá teheti, mint azt a ...példában láttuk. Ilyenkor a rendszerben állandó, vagy növekvő amplitúdójú rezgések vannak jelen. Ezt elkerülendő, a szabályozás tervezésekor elsőrendű fontosságú a stabilitás vizsgálata, mely megelőz minden más minőségi követelmény teljesítését.

A stabilitás fogalmának több megfogalmazását ismerjük és használjuk.

Egy gerjesztetlen rendszer stabil, ha egyensúlyi állapotából kimozdítva és magára hagyva, visszatér egyensúlyi állapotába.

Ezt a jól ismert megfogalmazást – egyensúlyi helyzetre alkalmazva - az alábbi ábrával szokás illusztrálni.



Mivel ezt a kísérletet egy tervezés alatt álló rendszerrel nem lehet elvégezni, ezért a stabilitás fogalmának egy olyan egzakt, matematikailag könnyen kezelhető megfogalmazása vált szükségessé, mely mind analitikus, mind szimulációs vizsgálatok során alkalmazható.

Stabil a gerjesztetlen rendszer, ha $w(t)$ súlyfüggvényének határértéke a végtelenben zérus:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

Egy más megfogalmazással a stabil rendszer $w(t)$ súlyfüggvénye abszolút integrálható:

$$\int_0^{\infty} |w(t)| dt < K$$

Egy gerjesztett rendszert **aszimptotikusan stabilnak** mondunk, ha kis gerjesztés változásokra kis jelváltozással válaszol (Bounded Input-Bounded Output=BIBO stabilitás).

A lineáris folyamatok jól jellemezhetők $G(s)$ átviteli függvényükkel, a szabályozási körök pedig alapjelkövetésre vonatkozó

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}$$

eredő átviteli függvényükkel, vagy egyéb más, pl. zavarjelre, rendelkezőjelre stb. vonatkozó átviteli függvényükkel. Most egyelőre szabályozót még nem alkalmazunk, annak átviteli függvénye legyen $D(s) \equiv 1$. A szabályozási kör bármely jellemzőjének tranziens viselkedése, mely például a bemenőjel változása, vagy a zavarás fellépte után következik be, a rendszer

$$1 + D(s)G(s) = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökeivel (más szóval a zárt rendszer p_1, p_2, \dots, p_n pólusaival) van kapcsolatban. Itt $L(s) = D(s)G(s)$ a felnyitott hurok átviteli függvénye. Emlékeztetünk arra, hogy a karakterisztikus egyenlet p_1, p_2, \dots, p_n gyökei (a rendszer pólusai) ugyanis a rendszer tranziensét leíró homogén differenciálegyenlet

$$y_h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots$$

megoldásában az exponenciális tagok kitevői. Könnyen belátható, hogy időben csökkenő (idővel elhaló) megoldást csak negatív kitevőjű exponenciális függvények esetében kapunk. Mivel a valós pólusokon kívül $p_{ij} = \sigma \pm j\omega_d$ alakú konjugált komplex pólusok is felléphetnek, a stabilitás általános esetre vonatkozó feltétele a következő:

A zárt rendszer stabil, ha összes pólusának (az $1+G(s)=0$ karakterisztikus egyenlet gyökeinek) valós része negatív ($\sigma_i < 0$). A zárt rendszer viselkedésére tehát a nyitott rendszer $G(s)$ átviteli függvényéből következtethetünk!

A rendszer pólusait szokás a komplex számsíkon ábrázolni, hogy szemléletessé tegyük különféle paraméterek hatását a rendszer dinamikájára (lásd „gyökhelygörbe módszer”). A stabilitás szemmel is jól látható feltétele ekkor a következő:

A rendszer stabil, ha összes pólusa a komplex számsík bal térfelén helyezkedik el.

A rendszer instabillá válását egy szemléletes példával illusztráljuk. Tételezzük fel, hogy az ábrán látható $G(s)$ folyamatra **szinuszos alapjelet** kapcsolunk. Ekkor a kimenő szinuszos jelnek mind az amplitúdója, mind a fázisforgatása széles határok között változik a bemenő szinuszos jel körfrekvenciájától függően (lásd. a $G(j\omega)$ frekvenciafüggvény $A(\omega) = |G(j\omega)|$ amplitúdó-nagyítása és $\varphi(\omega)$ fázisforgatása). Véletlenül létezik azonban egy olyan ω_0 gerjesztő frekvencia, amelyre a rendszer válaszelének amplitúdója éppen megegyezik a bemenőjel amplitúdójával, fázisa pedig éppen 180 fokkal tér el. Úgy is mondhatjuk, hogy a **kimenőjel ellenfázisban van a bemenőjellel.**



Önfenntartó rezgés

Most képzeljük el, hogy az előbbi folyamatunk egy zárt szabályozási kör része. Zárjuk az eddig nyitott kört negatív visszacsatolással! Azt látjuk, hogy az ellenfázisú kimenőjel a negatív visszacsatolás következtében előjelet vált, és az eredetileg alkalmazott alapjellel teljesen megegyezik. Vagyis nem szükséges már alapjelet adni a rendszer bemenetére, az ω_0 körfrekvenciájú szinuszos jel fennmarad a rendszerben, a rendszer csillapítatlan rezgéseket végez ω_0 körfrekvenciával, mint egy oszcillátor („begerjed”).

Felmerülhet a kérdés, hogy honnan kaphat a rendszer - ha csak egy pillanatra is - éppen ω_0 körfrekvenciájú szinuszos jelet? A válasz egyszerű: a rendszert állandóan érik túszerű zajok a mechanikai tökéletlenségek (kotyogás, ütközés), villamos zavarok (kontaktus megszakadása kommutáláskor, stb.) következtében. A tuskék felfoghatók impulzus gerjesztésnek is. Azt pedig előző tanulmányainkból tudjuk, hogy egy Dirac-delta függvény végtelen sok, különböző frekvenciájú szinuszjel összegeként írható fel. Ezek között pedig megtalálható ω_0 is!

Egyszerű gondolat kísérletünk alapján a stabilitás határesetének feltételére valóban a karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\left. \begin{array}{l} |G(j\omega_0)| = A(\omega_0) = 1 \\ \varphi(\omega_0) = -180^\circ \end{array} \right\} G(j\omega_0) = -1$$

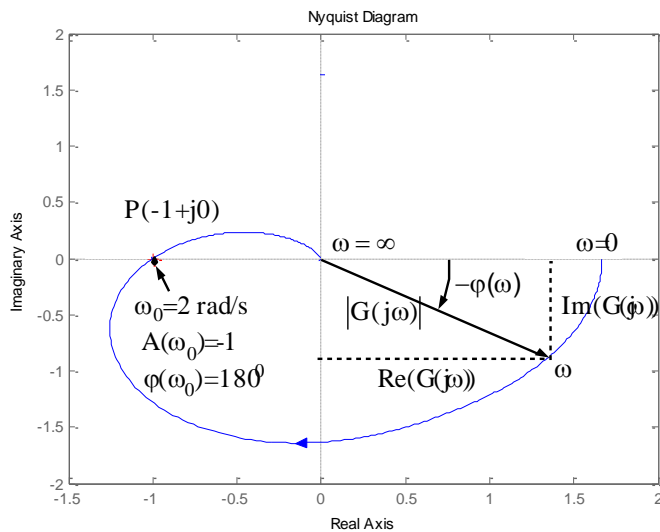
Nyquist-féle stabilitási kritérium

A stabilitás megítélhető a *Nyquist*-diagram alapján is, ha a $G(j\omega)$ frekvenciafüggvényt az ω paraméter függvényében a komplex számsíkon ábrázoljuk, miközben a gerjesztés körfrekvenciája $\omega=0$ és $\omega=\infty$ között változik. A *Nyquist*-diagram egy adott ω -hoz tartozó $G(j\omega)$ pontját $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ valós, illetve $\text{Im}\{G(j\omega)\}$ képzetes résszel jellemezhetjük. A görbe egy adott körfrekvenciához tartozó pontja és az origó távolsága az $|G(j\omega)|$ amplitúdó-nagyítást adja, míg a görbe egy adott pontjához húzott sugárnak a valós tengellyel bezárt $\varphi(\omega)$ szöge a fázisszög. Az ábrán példaként a

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 2s^2 + 4s + 3}$$

átviteli függvényű folyamat *Nyquist*-diagramját látjuk pozitív körfrekvenciákra. A diagram a következő MATLAB utasításokkal rajzoltatható meg:

```
G=tf([5],[1 2 4 3]); %tf=transfer function
w=0.0001>.01>100;
nyquist(G,w);
```



A *Nyquist*-diagram a valós tengely $G(j0)=5/3$ statikus erősítést leíró pontjából indul, miközben a rendszer fokszámaival megegyező számú (most 3) síknegyeden áthaladva az origóba tart. Az ábrázolt folyamat éppen a stabilitás határán van, mivel létezik egy olyan $\omega_0 = \pm 2$ rad/s körfrekvencia, ahol a $G(j\omega_0)=-1$ feltétel teljesül. Ugyanis

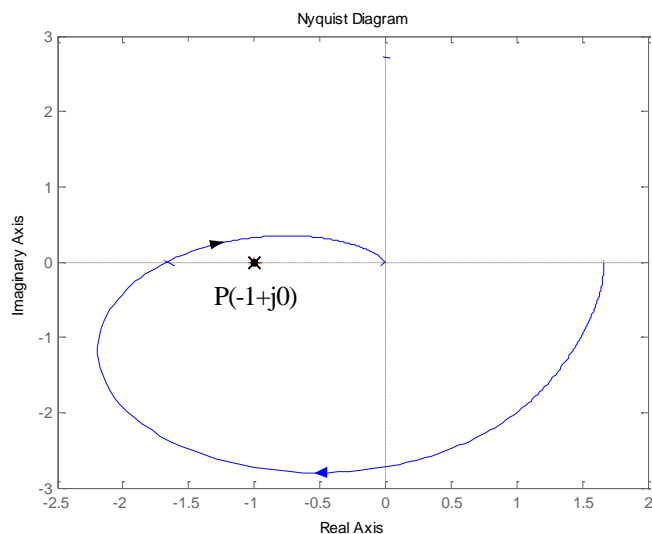
$$G(j\omega) = \frac{5}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + 4j\omega + 3} = \frac{5}{(3 - 2\omega^2) + j(4\omega - \omega^3)} = \frac{\overbrace{5(3 - 2\omega^2)}^{\text{VALÓS}} - \overbrace{j5(4\omega - \omega^3)}^{\text{KÉPZETES}}}{(3 - 2\omega^2)^2 + (4\omega - \omega^3)^2}$$

akkor valós, ha képzetes része $\omega(4 - \omega^2) = 0$, vagyis $\omega_1=0$ és $\omega_{2,3}=\pm 2$. Ha $\omega_1=0$, akkor $G(j0)=5/3$ (a statikus erősítés). Amennyiben viszont $\omega=\omega_0=2$ rad/s, akkor $G(j2)=-1$, a rendszer valóban a stabilitás határán van. A *Nyquist*-diagram ω_0 körfrekvenciához tartozó pontja $P(-1+j0)$.

Ha a Nyquist-diagram áthalad a $(-1+j0)$ ponton, akkor a rendszer a stabilitás határán van.

Ha a görbe mentén növekvő körfrekvenciák irányában haladva a $(-1+j0)$ pontot balkéz felől látjuk, akkor a rendszer stabil, ellenkező esetben labilis.

Labilis, $G(s) = \frac{5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 3}$ átviteli függvényű folyamat *Nyquist*-diagramja látható a következő ábrán, ahol a diagram körbefogja a $P(-1+j0)$ pontot.



Ellenőrzés. A stabilitás tényére - mint említettük- a zárt rendszer pólusaiból is következtethetünk. Az ábrán látható átviteli függvényű instabil folyamat pólusait úgy kapjuk, ha $1+G(s)=0$ karakterisztikus egyenletet megoldjuk:

$$s^3 + 2s^2 + 3s + 8 = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = 0$$

Egy n-ed fokú algebrai egyenlet gyökeit a következő egyszerű MATLAB utasítással számíthatjuk ki:

```
v=[1 2 3 8];
roots(v)
```

Az eredmény, a p_1 , p_2 , és p_3 pólus a következő:

```
ans =
```

```
-2.2483
 0.1241 + 1.8822i
 0.1241 - 1.8822i
```

A valós pólus ($p_1=-2,2483$) negatív, ellenben a konjugált komplex póluspár valós része ($\sigma =0,1241$) pozitív, ezért a rendszer valóban instabil.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy bár a konjugált komplex pólusok $p=\sigma\pm i\omega_p$ alakban írhatók, ne tévesszük össze a frekvenciafüggvénynél alkalmazott szinuszos gerjesztés ω körfrekvenciáját a pólusok ω_p képzetes részével!

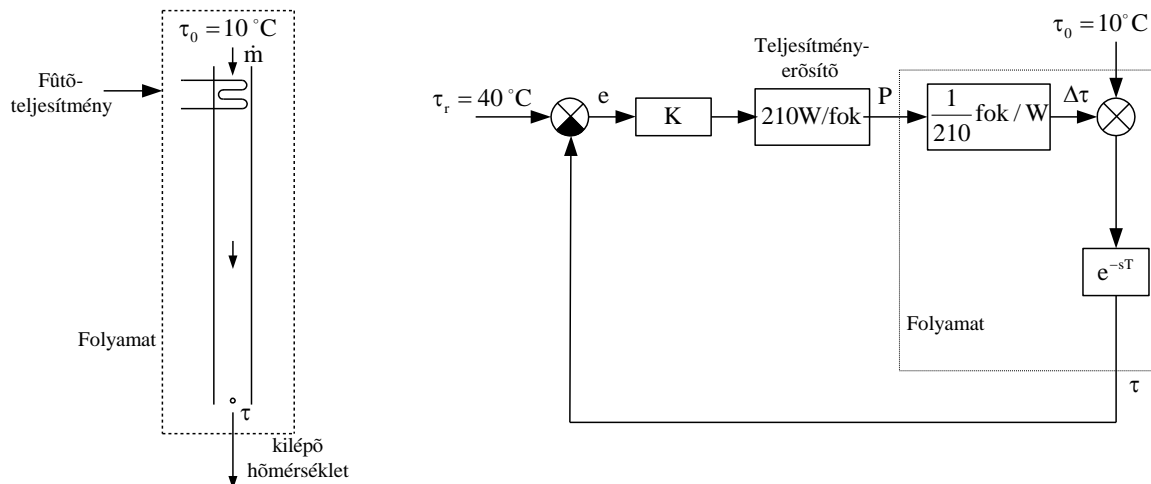
Példa

Képzeld el, hogy egy tökéletesen hőszigetelt csővezeték elején a belépő $\tau_0=10$ °C hőmérsékletű, $\dot{m} = 0,05$ kg/s tömegáramú, $c=4200$ kJ/kgK^o fajhőjű vizet P teljesítményű villamos fűtőszállal melegítjük $\tau_r=40$ °C hőfokra. (ábra)

A víz hőmérsékletét a hosszú csővezeték kiömlő keresztmetszetében mérjük. A folyadék a beömlési keresztmetszettől T idő alatt ér a kiömlési keresztmetszethez. A hőmérséklet-jelét mereven visszacsatoljuk. A szabályozó K arányos erősítésű, ami azt jelenti, hogy az $e=(40-\tau)$ fokos rendelkezőjel K -szorosával növeli a beömlő víz hőmérsékletét.

Határozzuk meg a szabályozás stabil működésének feltételét

- arányos
- integráló szabályozó alkalmazásakor!



Megoldás

Ad a)

A szabályozási kör a szabályozóból, a teljesítményerősítőtől és a szabályozandó folyamatból áll. A szabályozó kimenő jele azt adja meg, hogy hány fokkal kell növelni a víz hőmérsékletét a rendelkezőjel függvényében. A teljesítményerősítő a szabályozó jelével arányos villamos teljesítményt biztosít a folyamat számára. A folyamat a beérkező 10 fokos víz késleltetett hőmérséklet-emelkedésével jellemezhető, adott villamos teljesítmény hatására.

A folyamat átviteli függvényének meghatározásához vegyük figyelembe, hogy ha az „ m ” tömegű folyadékba „ t ” idő alatt $Q = cm\Delta\tau = P \cdot t$ energiát vezetünk, a víz hőmérséklete a fűtőszál elhagyva

$$\Delta\tau = \frac{P}{cm}$$

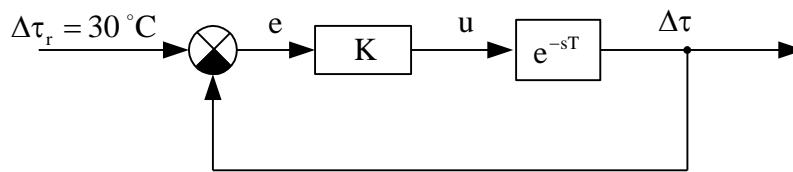
fokkal emelkedik (feltéve, hogy a fűtőszál c_{fm} hőkapacitása elhanyagolható). A hőmérséklet növekedése csak T idő után mérhető a kimeneten, ezért

$$G^*(s) = \frac{\Delta\tau(s)}{P(s)} = \frac{1}{cm} e^{-sT}$$

A teljesítményerősítő átviteli függvénye (egy fok hőmérsékletemeléshöz szükséges teljesítmény) hasonló módon származtatható:

$$A(s) = \frac{P(s)}{U(s)} = cm = 210 \text{ W / fok}$$

A szabályozási kör egyszerűsíthető, ha áttérünk a hőmérséklet-jelek helyett a hőmérséklet-változás jelekre. Az alapjel ekkor 30 fok hőmérsékletnövekedés (10 fokról 40 fokra). Továbbá a teljesítményerősítő és a folyamat összevonható. Az egyszerűsített blokkdiagram az ábrán látható.



A felnyitott hurok alapjelre vonatkozó átviteli függvénye

$$L(s) = D(s)G(s) = Ke^{-sT}$$

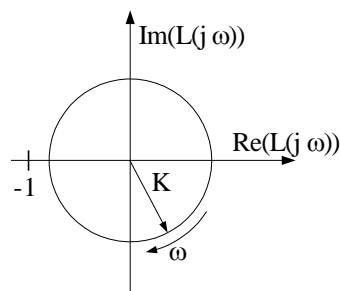
A stabilitás egyszerűsített *Nyquist*-kritérium szerinti vizsgálatakor a felnyitott hurok $L(j\omega)$ frekvenciafüggvényét vizsgáljuk. Először írjuk át a komplex szám exponenciális alakját trigonometrikus alakra:

$$L(j\omega) = Ke^{-j\omega T} = K[\cos(-\omega T) + j\sin(-\omega T)] = K[\cos(\omega T) - j\sin(\omega T)]$$

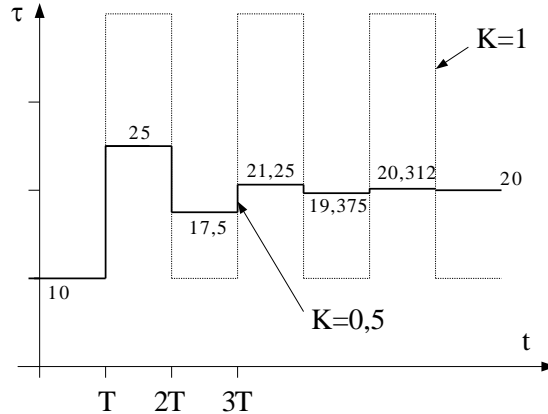
A frekvenciafüggvény abszolút értéke (tetszőleges pontjának az origótól mért távolsága)

$$|L(j\omega)| = K\sqrt{\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T)} = K$$

vagyis a *Nyquist-diagram* egy K sugarú kör.



A rendszer akkor van a stabilitás határán, ha a kör átmegy a $(-1+j0)$ ponton, vagyis $K=1$. **A stabil működés feltétele $K < 1$.** Az ábrán $K=0,5$; $K=1$ esetre látjuk a kifolyó víz hőmérséklet változását.



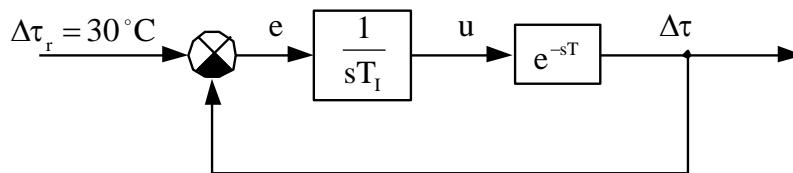
Ha betartjuk a $K < 1$ feltételt, a rendszer stabilan működik ugyan, de állandósult hibája elfogadhatatlanul nagy. Például $K = 0,5$ esetén a rendszer mindössze $\Delta\tau = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ állandósult hőmérséklet-változást okoz, vagyis a víz állandósult hőmérséklete 20°C lesz a 40°C helyett!

$$\left(\text{hiba} = \frac{1}{1+K} \cdot 100 = 66\% \rightarrow \Delta\tau_{s-s} = (1-0,66) \cdot 30 = 10 \text{ }^\circ\text{C} \rightarrow \tau_{s-s} = 10 + 10 = 20 \text{ }^\circ\text{C}\right).$$

Az erősítés növelése ($K \leq 1$ -ig) valamivel csökkenti az állandósult szabályozási eltérést, de nem eredményez jelentős javulást.

Ad b)

Előző ismereteink alapján próbálkozzunk integráló típusú szabályozóval, mivel azzal az állandósult szabályozási eltérés megszüntethető. Ügyelni kell azonban az integrátor T_I integrálási idejének helyes megválasztására a stabilitás fenntartása érdekében! Határozzuk meg a stabil működéshez szükséges integrálási idő korlátját!



Integráló típusú szabályozóval a hurok frekvencia-függvénye $L(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_I} \cdot e^{-sT}$, amit valós és képzetes részre bontunk az alábbiak szerint:

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_I} \cdot e^{-sT} = \frac{\cos(-\omega T) + j\sin(-\omega T)}{j\omega T_I} \cdot \frac{j}{j} = \frac{\sin \omega T + j\cos \omega T}{-\omega T_I} = \underbrace{-\frac{\sin \omega T}{\omega T_I}}_{\text{Re}} - \underbrace{j\frac{\cos \omega T}{\omega T_I}}_{\text{Im}}$$

A Nyquist-diagram végtelen sokszor metszi a valós tengelyt, ezek közül a legalacsonyabb körfrekvencia (ahol a képzetes rész először nulla)

$$\frac{\cos \omega T}{\omega T_I} = 0 \rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{2T}$$

Ezen a körfrekvencián a hurokátviteli függvény valós részének abszolút értéke kisebb kell legyen 1-nél. Ebből a feltételből a T_I integrálási időre nézve a T holtidő függvényében a következő korlátot kapjuk:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2T} \cdot T\right)}{\frac{\pi}{2T} T_1} < 1 \rightarrow T_1 > \underline{\underline{\frac{2}{\pi} T}}$$

Példa

Egy mikrofonból, erősítőből, hangszóróból álló rendszer szinte mindig visszacsatolt rendszerként működik, mivel a kibocsátott hang a levegőn keresztül $T=h/c$ időkéssel (holtidővel) visszajut a rendszer bemenetére (a mikrofonba). Itt „h” a hangszóró és a mikrofon távolsága, „c” pedig a hang sebessége. Vizsgáljuk meg a rendszer stabilitásvesztésének (begerjedésének) feltételét!

Megoldás

Most nem negatív, hanem pozitív visszacsatolásról van szó, hiszen a mikrofonhoz érkező jelek előjelhelyesen összegeződnek. A stabilitásvesztés határán a hangszóróból érkező jel levegő általi csillapítása és az erősítő erősítése megegyezik, így állandó amplitúdójú rezgések maradnak fenn, melyek körfrekvenciája ideális (0 fázistolású) erősítőt feltételezve

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{h}{c} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi c}{h}$$

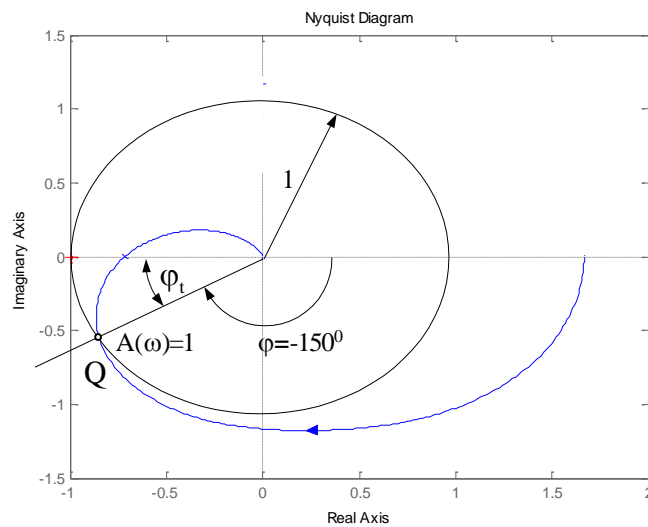
Ez a véletlenszerűen bekövetkező állapot megszüntethető, ha az erősítő erősítését kismértékben csökkentjük (az ún. erősítés-tartalékot növeljük).

A stabilitás mértékének jellemzése

Legtöbbször a *Nyquist*-diagram görbéje elkerüli a $(-1+j0)$ pontot, tehát az egységnyi amplitúdó és a 180 fokos fáziskésés nem egyszerre következik be. Ha azt szeretnénk tudni, hogy mennyire stabil a rendszer, akkor a stabilitás határesetének két feltétele közül az egyik teljesülését feltételezzük és csupán azt vizsgáljuk, hogy a másik feltétel mennyiben tér el a határesetétől. Két lehetőséget különböztetünk meg:

- a) Tételezzük fel, hogy teljesül a stabilitásvesztés egyik szükséges feltétele: az erősítés egy adott ω_c ún. vágási körfrekvencián éppen egységnyi ($|G(j\omega_c)| = 1$). A stabilitás mértékét a fázisszög-feltétel alapján minősítjük. Azt vizsgáljuk, hogy a fázisszög mennyiben tér el a -180 foktól, a stabilitásvesztés másik feltételétől?

A *Nyquist*-diagramon az egységnyi erősítésnek a görbe azon Q pontja felel meg, mely az egység sugarú kört metszi. A fázisszög az ábrán $\varphi(\omega_c)$, negatív szám.

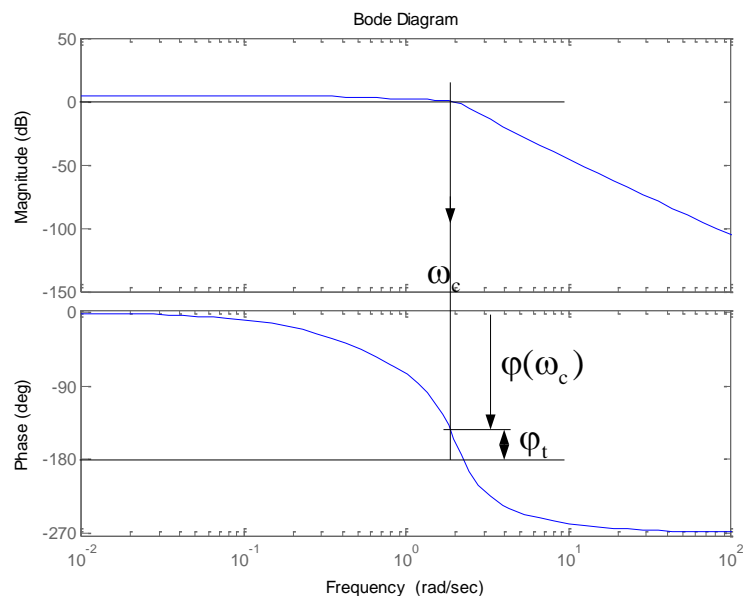


A stabilitásvesztés határesetéig a fázisszög még

$$\varphi_t = \varphi(\omega_c) + 180^\circ$$

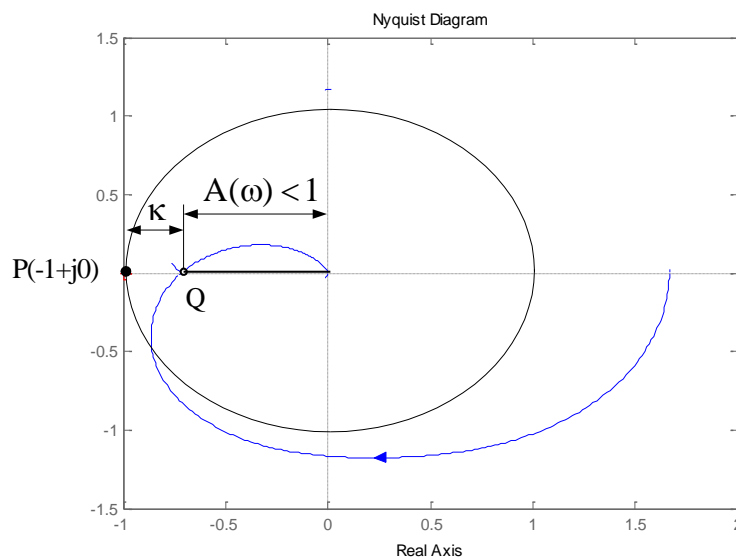
szöggel változhat. A φ_t szöveget **fázistartaléknak** (phase margin) nevezzük. Minél nagyobb a fázistartalék, annál stabilabb a rendszer működése, annál nagyobb paraméterváltozásokat, zavarásokat, illetve jelkésleltetést képes elviselni. Ökölszabályként megjegyezhetjük, hogy a fázistartalék szokásos értékét ipari szabályozásokban 60 fok körüli értékre szokás választani.

A fázistartalékot a *BODE*-diagramon is meghatározhatjuk. Az egységnyi erősítésnek az amplitúdó-körfrekvencia diagramon 0 dB felel meg. Az amplitúdó-diagramnak a 0 dB egyenessel való metszéspontja adja az ω_c vágási frekvenciát. A φ_t fázistartalék a fázisdiagramon értelmezhető.

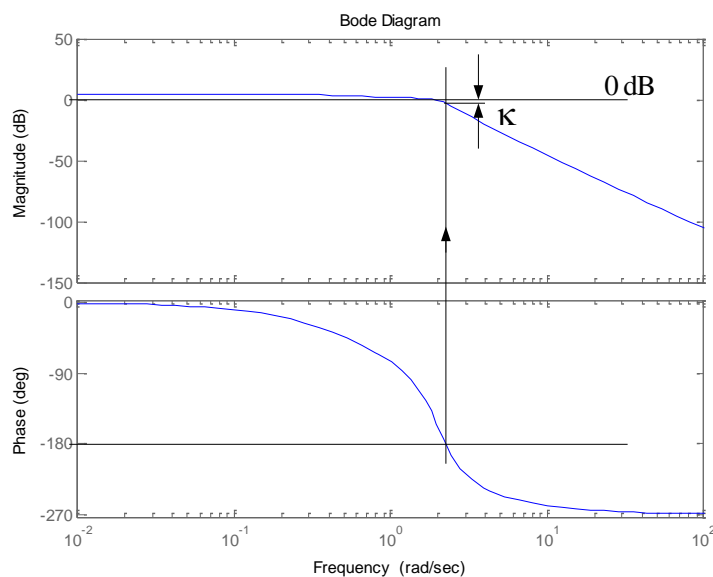


- b) Most tételezzük fel, hogy a fázisszög egy bizonyos körfrekvencián -180 fok (ez a stabilitásvesztés egyik szükséges feltétele). A stabilitás mértékét az amplitúdó-feltétel alapján minősítjük. Azt vizsgáljuk, hogy az erősítés mennyiben tér el az egységtől, a stabilitásvesztés másik feltételétől?

A *Nyquist*-diagramon a -180 fokos fázisszögnek a diagram negatív valós tengelyen lévő Q pontja felel meg. Minél nagyobb a Q pont távolsága a $P(-1+j0)$ ponttól, annál jobban különbözik az erősítés a kritikus 1 értéktől. A Q és a $P(-1+j0)$ pontok κ távolsága az **erősítés-tartalék** (gain margin).



A BODE-diagramon is értelmezhetjük az erősítés-tartalékot:



Az előbbieken tárgyalt *Nyquist*-féle stabilitási kritérium hallgatólagosan feltételezte, hogy egy n -ed rendű karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása nem jelent matematikai

problémát. Ez azonban csak az utóbbi időben van így, amióta a számítástechnika fejlődése lehetővé teszi hatékony numerikus gyökkereső algoritmusok használatát (lásd a roots() MATLAB utasítást). A szabályozástechnika kezdeti szakaszában hatalmas erőfeszítéseket tettek, hogy olyan stabilitási kritériumokat dolgozzanak ki, melyek nem igénylik a karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározását. Ezen eljárások közül a *Hurwitz*-féle stabilitási kritériummal foglalkozunk.

Hurwitz-féle stabilitási kritérium

A *Hurwitz*-féle stabilitási kritérium az

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

alakban felírt karakterisztikus egyenlet a_i együtthatói alapján ítéli meg a stabilitás tényét, mértékére nézve azonban nem szolgál információval. A rendszer stabilitásának szükséges feltételei a következők:

- 1) A karakterisztikus egyenlet összes együtthatója zérustól különbözik és azonos előjelű.
- 2) Az együtthatókból a

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots \end{vmatrix}$$

szabály szerint képezett determináns és annak főátlóra támaszkodó al-determinánsai pozitívak. (A negatív indexű együtthatókat zérusnak vesszük)

Az eljárás előnye, hogy analitikus kapcsolat képezhető az együtthatók között.

Példa

Legyen egy folyamat átviteli függvénye $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ és az alkalmazott „PI”

szabályozó átviteli függvénye $D(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s}$. Vizsgáljuk meg, hogy milyen tartományban kereshetjük a szabályozó K_p és K_I paramétereit a stabilitás feltételének betartásával?

Megoldás

A zárt szabályozási kör eredő átviteli függvényének nevezője $s(s+1)(s+2) + sK_p + K_I$. A karakterisztikus egyenlet tehát

$$\underbrace{1}_{a_3} s^3 + \underbrace{3}_{a_2} s^2 + \underbrace{(2 + K_p)}_{a_1} s + \underbrace{K_I}_{a_0} = 0$$

Mivel az a_i együtthatóknak pozitívnak kell lenni, ezért $K_I > 0$ és $K_p > -2$. Az együtthatókból képezett determináns

$$D = \begin{vmatrix} 3 & K_I & 0 \\ 1 & 2 + K_P & 0 \\ 0 & 3 & K_I \end{vmatrix}.$$

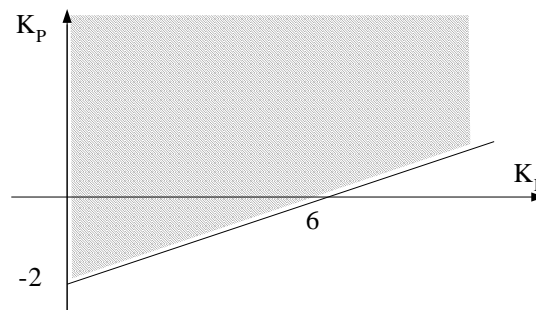
A főátlóra támaszkodó aldeteminánsok rendre a következők:

$$D_1 = 3 > 0$$

$$D_2 = 3(2 + K_P) - K_I > 0 \rightarrow \underline{\underline{K_P > \frac{1}{3}K_I - 2}}$$

$$D_3 = K_I D_2 > 0$$

A szabályozó paramétereinek stabilitás szempontjából megengedett tartománya az ábrán látható.



Példa

Döntsük el, hogy a

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$$

differenciálegyenlettel jellemzett egy szabadságfokú mechanikus lengőrendszer stabil-e?

Megoldás

A stabilitás ténye annak felel meg, hogy a tömeget egyensúlyi helyzetéből valamilyen x_0 és/vagy v_0 kezdeti értékekkel elindítva és a rendszert magára hagyva, a tömeg visszatér eredeti egyensúlyi helyzetébe (megengedve azt az esetet is, hogy közben csillapodó rezgéseket végezzen az egyensúlyi helyzet körül).

Szabad mozgásnál átviteli függvényt nem tudunk értelmezni, mert nincs bemenőjel (gerjesztés). A mozgásegyenlet Laplace-transzformációját a kezdeti feltételeknek megfelelően elvégezve

$$m(s^2 X(s) - sx_0 - v_0) + k(sX(s) - x_0) + cX(s) = 0$$

A kimenet

$$X(s) = \frac{mx_0 s + mv_0 + kx_0}{ms^2 + ks + c}$$

alakú, mely akkor válik instabillá, ha nevezője zérus. Figyeljük meg, hogy a karakterisztikus egyenlet a homogén differenciálegyenlet zérus kezdeti feltételekkel vett Laplace-transzformáltjából adódik:

$$ms^2 + ks + c = 0$$

A karakterisztikus egyenlet összes együtthatója pozitív, valamint minden tag létezik, ezért a stabilitást csupán a

$$\begin{vmatrix} k & 0 \\ m & c \end{vmatrix} = kc > 0$$

determináns értéke határozza meg, mely minden esetben pozitív.

Az olyan rendszert, mely a rendszer paramétereinek értékétől függetlenül stabil, **strukturálisan stabilnak** nevezzük.

Az első és másodrendű rendszer mindig strukturálisan stabil, tehát ilyen esetben szükségtelen stabilitásvizsgálatot végezni.

Figyeljük meg, hogy a *Hurwitz*-kritérium csupán a stabilitás tényére nézve szolgált információval, mértékére nézve azonban nem.