Numerikus módszerek

A. Egyenletek gyökeinek numerikus meghatározása

A1) Határozza meg az

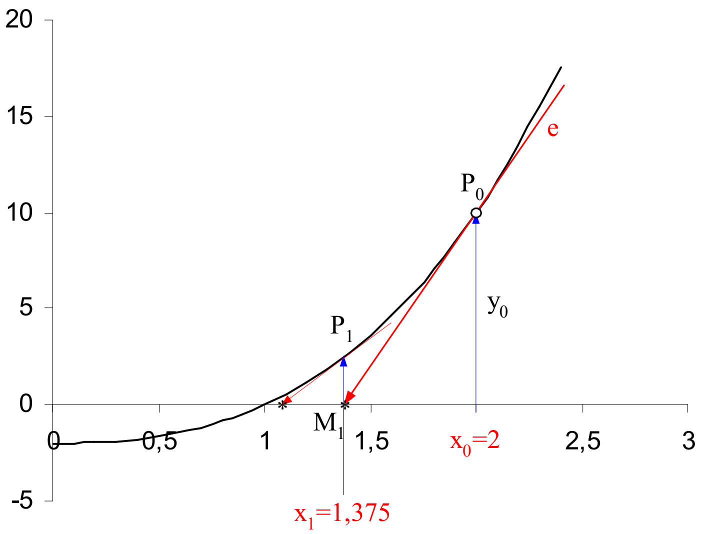
$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

*egyenlet (egyik) gyökét **érintő módszerrel**. Kezdje a számítást az x_0=2 helyen!*

Megoldás: $x \approx 1{,}000$

Megoldás

A függvény $P_0(x_0;\, y_0)$ kezdőpontbeli értéke $y_0 = 2^3 + 2^2 - 2 = 10$, ami jelentősen eltér nullától, tehát az x_0=2 érték nem gyöke az egyenletnek.



A függvény deriváltja (érintőjének meredeksége) tetszőleges helyen

$$y' = 3x^2 + 2x$$

A derivált értéke x_0=2 helyen

$$y'_0 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16$$

A függvény $P_0(x_0;y_0)$ pontbeli „e” érintőjének egyenlete („egy ponton átmenő egyenes egyenlete” lásd középiskola!)

$$y - y_0 = \underbrace{m}_{y'_0}(x - x_0)$$

Az „e” érintő egyenes és az *x* tengely „M_1” metszéspontjának x_1 abszcisszája a keresett gyök első közelítő értéke:

$$0 - y_0 = y'_0(x_1 - x_0)$$

Innen

$$x_1 = \frac{y'_0 x_0 - y_0}{y'_0} = \frac{16 \cdot 2 - 10}{16} = 1{,}375$$

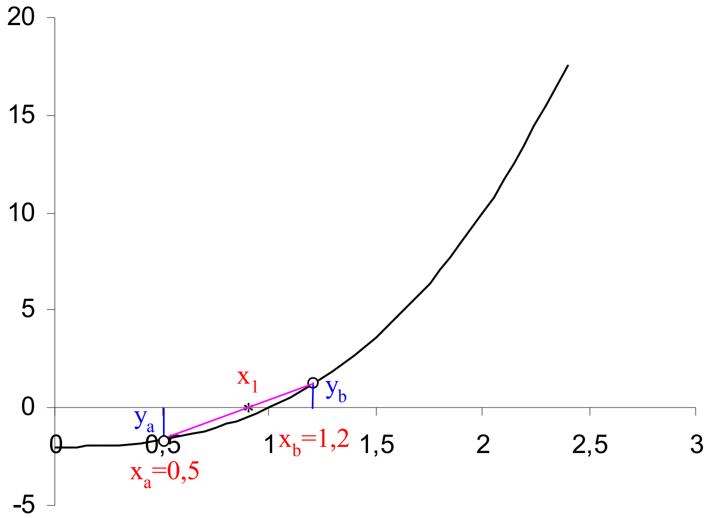
Itt a függvény értéke $y_1 = 1{,}375^3 + 1{,}375^2 - 2 = 2{,}49$, ami még mindig messze van zérustól. Ezért az eljárást hasonló módon folytatjuk a $P_1(x_1;\, y_1)$ pontból, amíg két egymást követő gyök már csak kissé különbözik egymástól. Az eljárás gyorsan konvergál, három lépés után a keresett gyök közelítő értéke x_3=1,0046.

A2) Határozza meg az

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

egyenlet (egyik) gyökét ***húrmódszerrel****. Legyen a két kezdő pont abszcisszája* $x_a = 0{,}5$ *és* $x_b = 1{,}2$.

Megoldás



A két ponton átmenő egyenes egyenlete (lásd középiskolai koordináta geometria!)

$$y - y_a = \underbrace{\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}}_{m}(x - x_a)$$

ahol y_a=-1,625 és y_b=3,625.

Ennek a húrnak és az x tengelynek a metszéspontja adja a keresett gyök első közelítését:

$$x_1 = x_a - y_a \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} \approx 0{,}809$$

Az eljárást hasonló módon folytatjuk. Az új baloldali végpont $(x_1;\, y_1)$ lesz. Az eljárás elég lassan konvergál. Megoldás: $x \approx 1{,}000$.

A3) Határozza meg az

$$e^x - 5x = 0$$

egyenlet (egyik) gyökét ***érintő módszerrel****. Kezdje a számítást az* x_0*=0,5 helyen!*

Megoldás: $x \approx 0{,}26$

A4) Határozza meg az

$$e^x - 5x = 0$$

egyenlet (egyik) gyökét ***húrmódszerrel****. Legyen a két kezdő pont abszcisszája* $x_a = 0$ *és* $x_b = 2$

Megoldás: $x \approx 0{,}26$

A5) Határozza meg a

$$\log 2x + x - 1 = 0$$

transzcendens egyenlet gyökét ***iterációval****. Kezdje a számítást az x_0=0,7 helyen!*

Megoldás: $x \approx 0{,}797$

A6) Határozza meg az

$$1 - 0{,}2x^2 - \sin x = 0$$

transzcendens egyenlet (egyik) gyökét ***iterációval****. Kezdje a számítást az x_0=0,5 helyen!*

Megoldás: $x \approx 0{,}956$

B. Differenciálegyenletek numerikus megoldása

B1) Egy matematikai inga mozgását leíró differenciálegyenlet

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 36 \sin\varphi = 0$$

alakú. Határozza meg step-by-step módszerrel az első 5 függvényértéket, ha az inga φ_0=1 radiános szöghelyzetből indul zérus kezdeti szögsebességgel. Válassza az idő lépésközt h=0,05 másodpercre!

Megoldás

A második deriváltat differencia-hányadossal közelítjük:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx \frac{\varphi - 2\varphi_r + \varphi_{rr}}{h^2}$$

(itt φ_r az eggyel régebbi, φ_{rr} a kettővel régebbi függvényértéket jelöli)

A differenciálegyenletbe helyettesítve a második derivált közelítő értékét az alábbi rekurzív formulát kapjuk:

$$\varphi = 2\varphi_r - 36h^2 \sin\varphi_r - \varphi_{rr}$$

A kezdeti feltételhez az első deriváltat szintén differencia hányadossal közelítjük:

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_0 \approx \frac{\varphi(0) - \varphi_r(0)}{h}$$

ahonnan

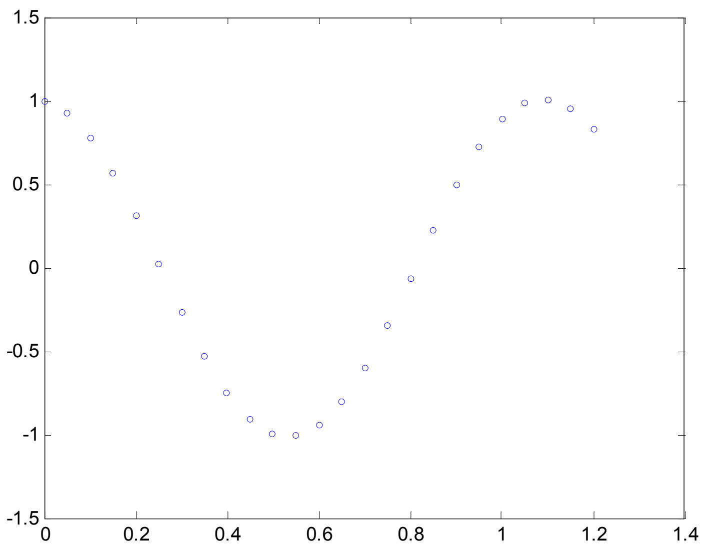
$$\varphi_r(0) \approx \varphi(0) - \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_0 \cdot h \quad \rightarrow \quad \varphi_r(0) = 1$$

Step-by-step számítás táblázata.

t	φ_{rr}	φ_r	$\varphi = 2\varphi_r - 36h^2 \sin\varphi_r - \varphi_{rr}$
0	-	$\varphi_r(0) = 1$ (k.f)	$\varphi(0) = 1$ (kezd. felt)
0,05	1	1	0,9243
0,10	1	0,9242	0,7767
0,15	0,9242	0,7765	0,5660

Egy lehetséges Matlab kód:

```
hold off
h=0.05;
f=1;
fr=f;
frr=f;
t=0;
for i=1:25
    plot(t,f,'o','MarkerSize',3);
    hold on
    disp(f);
    f=2*fr-36*h*h*sin(fr)-frr;% ez a tulajdonképpeni algoritmus
    frr=fr; % shiftelés
    fr=f; % shiftelés
    t=t+h;
end
```



*B2)Oldja meg numerikusan step-by-step módon, **Euler-Cauchy módszerrel** a*

$$\frac{du}{dt} = 10t$$

differenciálegyenletet u_0=1 kezdeti feltétellel és h=0,1 s idő-lépésközzel!

Megoldás:u(t)=1; 1; 1.1; 1.2; 1.5; 1.9; ….

B3) Oldja meg numerikusan step-by-step módon, ***javított Euler-Cauchy módszerrel*** *a*

$$\frac{du}{dt} = 10t$$

differenciálegyenletet $u_0=1$ kezdeti feltétellel és h=0,1 s idő-lépésközzel!

Megoldás:u(t)=1; 1.05; 1.2; 1.45; 1.8; ….

B4) Írja át a

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + 5u = 0$$

differenciálegyenletet differencia-egyenletté! A lépésköz legyen „h”.

Megoldás: $\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 3\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 5u_i = 0 \quad \to u_{i+1} = ...$

B5) A h=1 lépésközzel mintavételezett függvényértékek a következők:1; 8; 27; 64; 125.
Határozza meg numerikusan a függvény alatti területet

a) Téglány-szabállyal

Megoldás: 100

b) Trapéz-szabállyal

Megoldás: 162

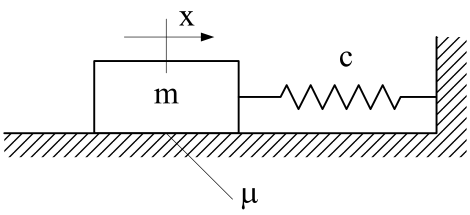
B6) Oldja meg numerikusan a

$$\frac{du}{dt} + 10u = 10u_b$$

differenciálegyenletet (kondenzátor töltése állandó feszültséggel) $u_0=2$ kezdeti feltétellel, valamint $u_b=10$ állandó gerjesztéssel! Válassza az idő lépésközt h=0,01 másodpercre! Határozza meg step-by-step módszerrel az első 5 függvényértéket!

Megoldás: 2; 2,8; 3,52; 4,17; 4,75;

B7) Egy m=1 kg nagyságú tömeg c=3000 N/m merevségű rugóval van a falhoz rögzítve. A tömeg az alapsíkon Coulomb-féle súrlódással van csillapítva (μ=0,6). A tömeget x_0=0,05 méterrel kitérítjük egyensúlyi helyzetéből és magára hagyjuk. Határozza meg numerikusan az x(t) elmozdulás-idő függvényt a tömeg leállásáig. A lépésközt válassza h=0,002 s-ra!
(haladók részére!)



Egy lehetséges Matlab kód:

```
hold off
h=0.0002;
x=0.05;
xr=0.05;
xrr=0.05;
c=3000;
s=6;
t=0;
for i=1:2800
    x=xr*(2-h*h*c)-xrr-s*h*h*sign(xr-xrr);
    xrr=xr;
    xr=x;
 if 0.5*abs(xr-xrr)/(h*h)>s
    plot (t,x);
    hold on;
 elseif c*x>s
     plot (t,x);
     hold on;
 else
     xr=xrr;
     plot (t,xrr);
     hold on;
 end
    t=t+h;
end
```